

# Primena proporcionalno-integralnog kontrolera za sisteme prvog reda sa kašnjenjem korišćenjem Lambert W funkcije za podešavanje polova

Radmila Gerov, Poljoprivredna škola sa domom učenika Rajko Bosnić u Negotinu, Zoran Jovanović, Elektronski fakultet u Nišu

**Apstrakt**—U radu je prikazana regulacija sistema prvog reda sa transportnim kašnjenjem pomoću proporcionalno-integralnog regulatora, pri čemu je fokus dat na proveru stabilnosti dobijenog sistema. Projektovanje kontrolera baziran je na primeni Lambert W funkcije i postavljanju dominantnih polova na željeno mesto u beskonačnom spektru polova sistema sa transportnim kašnjenjem. Rezultat je dobijen simulacijom i upoređen sa drugim dobro poznatim metodama za projektovanje ovog kontrolera.

**Ključne reči**—PI regulator; transportno kašnjenje; Lambert W funkcija; Smitov prediktor.

## I. UVOD

Sistemi sa transportnim kašnjenjem (TDS) se često sreću u industriji i u većini slučajeva za regulaciju se koriste proporcionalno-integralni regulator (PI) ili proporcionalno-integralno-diferencijalni regulator (PID) [1]. Praksa je pokazala da je PI, kod sistema čija se dinamika opisuje prvim redom sa transportnim kašnjenjem (FOPTD), najzastupljeniji, dok se kod sistema višeg reda koji se mogu aproksimirati pomoću FOPTD, takođe može primeniti [2]. Uprkos činjenici da postoje više različitih metoda za projektovanje PI i stabilizaciju TDS, ovo je polje koje će i u budućnosti biti istraživano radi pronalaženja što efikasnije metode za stabilnost ovakvih sistema.

U ovom radu, PI je dizajniran postavljanjem dominantnih polova u beskonačnom spektru polova FOPTD korišćenjem Lambert W funkcije [3], uz pravila za matičnu Lambert W funkciju [4] i odgovarajuće metode date u [5]. Simulacijom je pokazano kako se menja dinamička karakteristika zatvorenog sistema promenom faktora relativnog prigušenja ( $\zeta$ ) i prirodne učestanosti oscilovanja ( $\omega_n$ ), kao i kakav je uticaj poremećaja na sistem. Stabilnost zatvorenog sistema, upoređena sa dozvoljenim parametrima PI datim u [6], a takođe je proverena Nikvistovim dijagramom. Za izračunavanje parametara PI korišćen je LambertW\_DDE Toolbox [7].

Radmila Gerov – Poljoprivredna škola sa domom učenika Rajko Bosnić, Bukovo bb, 19300 Negotin, Srbija (e-mail: gerov@ptt.rs).

Zoran Jovanović – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: Zoran.Jovanovic@elfak.ni.ac.rs).

Karakteristike zatvorenog sistema dobijene podešavanjem polova, rešavanjem diferencijalne jednačine sa kašnjenjem (DDE) [8], upoređene su sa karakteristikama dobijenim Smitovim prediktorom [9].

Lambert W funkcija, korišćena je za estimaciju parametara Drona 2.0 [10], ispitivanje stabilnosti glukozno-insulinskog sistema [11], optimalnu kontrolu kod problema vezanih za viskoznost [12]...

U sekciji II prezentovana je Lambert W funkcija, u sekciji III objašnjen je način projektovanja PI primenom matične Lambert W funkcije i u istoj su dati parametri za projektovanje Smitovog prediktora. U sekciji IV predstavljena je zavisnost odskočnog odziva sa promenom  $\zeta$  i  $\omega_n$ , kao i uticaj poremećaja na regulisani sistem. Istovremeno je izvršeno poređenje parametara PI, sa parametrima regulatora koji definišu stabilnost, a iste je dao Silva [6]. U sekciji V date su uporedne karakteristike sistema sa PI dobijenim ovom metodom i Smitovim prediktorom, a u sekciji VI dat je zaključak sa predlogom za dalju analizu.

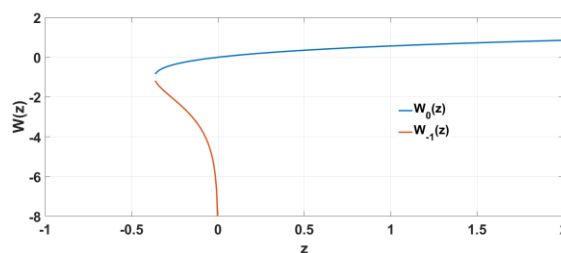
## II. LAMBERT W FUNKCIJA

Lambert W funkcija  $W(z)$  predstavlja rešenje jednačine

$$W(z)e^{W(z)} = z, z \in C. \quad (1)$$

Ukoliko  $z$  pripada skupu kompleksnih brojeva  $C$ , funkcija ima beskonačno mnogo rešenja, kao i beskonačno grana  $W_k(z)$  gde  $k \in (-\infty, \infty)$ . Samo grane za  $k=0$ ,  $W_0(z)$ -principal branch i  $k=-1$ ,  $W_{-1}(z)$  uzimaju realne vrednosti.

Ako  $z \in R$ , gde je  $R$  skup realnih brojeva i ako je  $z > 0$ , onda postoji samo jedno realno rešenje  $W_0(z)$ , a ako  $-1/e < z < 0$ , postoje dva realna rešenja  $W_0(z)$  i  $W_{-1}(z)$ , pri čemu je  $W_0(0)=0$ ,  $W_0(-1/e)=W_{-1}(-1/e)=-1$  i  $W_0(e)=1$ , Sl. 1.



Sl. 1. Grafik funkcije  $W_k(z)=z$  za  $z \in R$ ,  $k \in (-1, 0)$ .

$W_0(z)$  je analitička u nuli, što proističe iz Langrange teoreme koja daje serijsku ekspanziju:

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n.$$

sa radijusom konvergencije  $e^{-1}$ . Diferenciranjem (1) po  $W(z)$  i rešavanjem dobija se:

$$W'(z) = \frac{W(z)}{z(1+W(z))}, z \neq 0.$$

Simbolički integral  $W(z)$  nalazi se K. B. Rangerovom tehnikom:

$$\begin{aligned} \int W(z) dz &= (W^2(z) - W(z) + 1)e^{W(z)} + C \\ &= z(W(z) - 1) + \frac{1}{W(z)} + C. \end{aligned}$$

S obzirom da  $z$  i  $W(z)$  pripadaju skupu kompleksnih brojeva, ako je:  $W(z) = \xi + i\eta$  i  $z = x + iy$ , onda je:

$$\begin{aligned} x &= e^{\xi} (\xi \cos \eta - \eta \sin \eta), \\ y &= e^{\xi} (\eta \cos \eta + \xi \sin \eta). \end{aligned}$$

Kriva koja razdvaja  $W_0$  od  $W_I$  i  $W_{II}$  u  $W(z)$  ravni zajedno sa začkom -1 je:

$$-\eta \cot \eta + \eta i : -\pi < \eta < \pi,$$

dok je kriva koja razdvaja  $W_I$  i  $W_{II}$ ,  $\{-\infty, -1\}$ . Krive koje razdvajaju ostale grane su:

$$-\eta \cot \eta + \eta i : 2k\pi < \pm \eta < (2k+1)\pi, k = 1, 2, \dots$$

Detaljnije objašnjenje načina rešavanja jednačine (1) različitim numeričkim metodama kao i raspona grana  $W_k(z)$  i uslovi za konvergenciju u  $C$  može se naći u [3], dok su u Maple i Matlabu implementirane funkcije za rešavanje skalarnog i matričnog oblika ove jednačine.

### III. ODREĐIVANJE PARAMETARA PI REGULATORA

Neka su funkcije prenosa FOPTD objekta (2) i PI regulatora (3), gde je  $K_m$  koeficijent pojačanja,  $T_m$  vremenska konstanta,  $h$  transportno kašnjenje,  $K_p$  i  $K_i$  pojačanja proporcionalnog i integralnog regulatora.

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1} e^{-hs}. \quad (2)$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s}. \quad (3)$$

Ako su  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$  i  $r(t)$  označeni, respektivno: izlaz spregnutog sistema sa jediničnom negativnom povratnom spregom koji u direktnoj grani ima  $G_c(s)G_p(s)$ , upravljački signal koji je ulaz u objekat  $G_p(s)$  a istovremeno je izlaz iz PI regulatora  $G_c(s)$ , ulazni signal u  $G_c(s)$ , referentni signal, a njihove Laplasove transformacije  $Y(s)$ ,  $U(s)$ ,  $E(s)$  i  $R(s)$ , pri čemu je:

$$E(s) = R(s) - Y(s), \quad (4)$$

onda je spregnuti prenos objekta sa regulatorom:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}. \quad (5)$$

Zamenom (2) i (3) u (5) dobija se:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_m(K_p s + K_i)e^{-hs}}{T_m s^2 + s + K_m(K_p s + K_i)e^{-hs}}. \quad (6)$$

Karakteristična jednačina sistema

$$T_m s^2 + s + K_m(K_p s + K_i)e^{-hs} = 0, \quad (7)$$

ima beskonačno rešenja. Prevođenjem u vremenski domen, dobija se DDE drugog reda (8) za  $r(t)=0$ .

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{1}{T_m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{K_m K_p}{T_m} \frac{dy(t-h)}{dt} + \frac{K_m K_i}{T_m} y(t-h) = 0. \quad (8)$$

Smenom  $y = x_1, x_2 = x_1'$ , u (8) dobija se:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + A_d x(t-h), \text{ gde su matrice } x, A, A_d \text{ date u (9)}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{pmatrix}, A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{K_m K_i}{T_m} & -\frac{K_m K_p}{T_m} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Polovi sistema dobijaju se svođenjem karakteristične jednačine (10) na Lambert W oblik (11) pri čemu se uvodi nepoznata matrica  $Q \in C^{2 \times 2}$ , koja mora da zadovolji (12), tako da se rešenje (10) dobija iz (13) uz uslov (12).

$$S - A - A_d e^{-hS} = 0. \quad (10)$$

$$W_k(A_d h Q_k) e^{W_k(A_d h Q_k)} = h(S_k - A). \quad (11)$$

$$W_k(A_d h Q_k) e^{(W_k(A_d h Q_k) + Ah)} = A_d h. \quad (12)$$

$$S_k = \frac{1}{h} W_k(A_d h Q_k) + A. \quad (13)$$

Izbor željenih polova, u beskonačnom spektru polova, svodi se na izbor dominantnih polova (najbližih imaginarnoj osi kompleksne s ravni), a u [7] pokazano je da se oni dobijaju rešavanjem (13) samo za  $k=0$  ili  $k=\pm I$ , čime se garantuje da su isti dominantni.

Rešavanjem (12) i (13) za željene polove, određuju se parametri PI regulatora, pri čemu treba naglasiti da izbor lokacije željenih polova ne može biti proizvoljan već mora biti ispunjen uslov dominantnosti, u već navedenom smislu, koji je uslov za primenu ove metode. Sistem (12) i (13) može da se reši primenom naredbe fsolve ili LambertW\_DDE Toolboxom u Matlabu.

Pretpostavimo da je model sistema u Smitovom prediktoru idealan i jednak posmatranom sistemu  $G_p(s)$ .

Parametri PI regulatora nalaze se kao da  $G_p(s)$  nema transportno kašnjenje, jer se isto pomera van jedinične negativne povratne sprege. PI regulator dobijen na ovakav način ima funkciju prenosa i parametre date u (14) gde su  $\lambda_{1/2}$  željeni polovi sistema.

$$G_{cs}(s) = K_{ps} + \frac{K_{is}}{s}, K_{ps} = \frac{2\xi\omega_n T_m - 1}{K_m}, \quad (14)$$

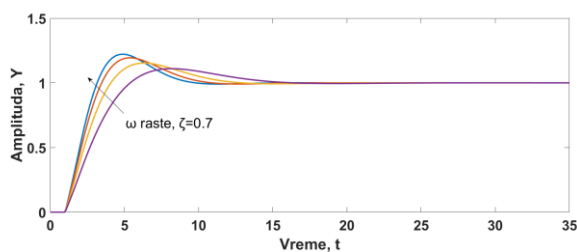
$$K_{is} = \frac{\omega_n^2 T_m}{K_m}, \lambda_{1/2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

#### IV. KARAKTERISTIKE SISTEMA

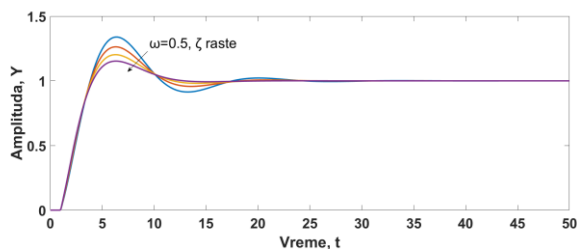
Posmatrani sistem dat je u [6] čija funkcija prenosa (2) ima parametre  $K_m=1, h=1, T_m=4$ .

Za izabrane vrednosti  $\zeta$  i  $\omega_n$ , parametri PI regulatora, IAE i ISE prikazani su u Tabeli I i Tabeli II.

Odskočni odziv sistema za različite vrednosti  $\omega_n$  i konstantno  $\zeta$  dat je na Sl. 2., a Sl. 3. predstavlja odskočni odziv sistema za konstantno  $\omega_n$  i različito  $\zeta$ .



Sl. 2. Odskočni odziv za  $\zeta=0.7$ , i  $\omega_n \in (0.4, 0.5, 0.6 \text{ i } 0.7)$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli I.



Sl. 3. Odskočni odziv za  $\omega_n=0.5$ , i  $\zeta \in (0.4, 0.5, 0.6 \text{ i } 0.7)$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli II.

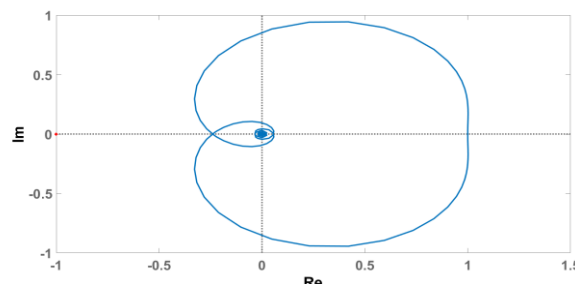
TABELA I  
PARAMETRI PI REGULATORA I GREŠKE IAE, ISE U FUNKCIJI PRIRODNE UČESTANOSTI OSCILOVANJA

$\zeta$	$\omega_n$	$\lambda_{1/2}$	$K_p$	$K_i$	IAE	ISE
0.7	0.7	-0.49±0.49i	1.8808	0.7775	2.804	1.797
	0.6	-0.42±0.43i	1.6964	0.7046	2.913	1.699
	0.5	-0.35±0.36i	1.4437	0.5913	3.091	1.961
	0.4	-0.28±0.29i	1.1175	0.4498	3.476	2.206

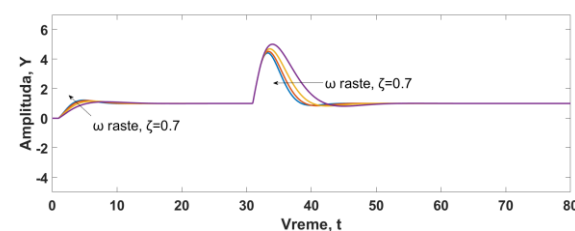
TABELA II  
PARAMETRI PI REGULATORA I GREŠKE IAE, ISE U FUNKCIJI FAKTORA RELATIVNOG PRIGUŠENJA

$\omega_n$	$\zeta$	$\lambda_{1/2}$	$K_p$	$K_i$	IAE	ISE
0.5	0.4	-0.20±0.46i	1.1361	0.7738	4.307	2.359
	0.5	-0.25±0.43i	1.2729	0.7069	3.717	2.153
	0.6	-0.30±0.40i	1.3736	0.6663	3.342	2.032
	0.7	-0.35±0.36i	1.4437	0.5913	3.091	1.961

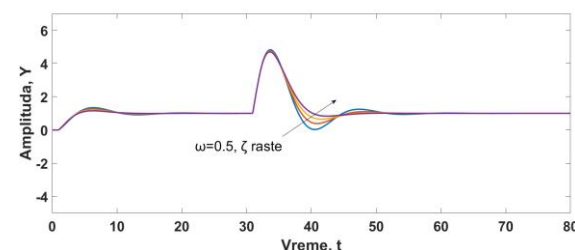
Poređenjem dobijenih  $K_p$  i  $K_i$  sa grafikom datim na slici "Fig. 6 The stabilizing set of  $(k_p, k_i)$  values" u [6], lako se može uočiti da dobijene vrednosti  $K_p$  i  $K_i$  pripadaju skupu dozvoljenih vrednosti, što ukazuje da je ovako projektovan sistem stabilan, što se vidi i sa Nikvistovog dijagrama Sl. 4.



Sl. 4. Nyquist dijagram za  $\zeta=0.7$ , i  $\omega_n=0.4$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli I.



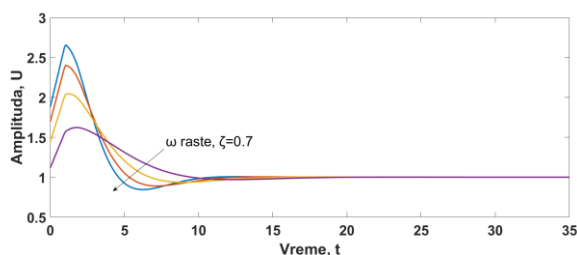
Sl. 5. Odziv sistema za  $\zeta=0.7$ , i  $\omega_n \in (0.4, 0.5, 0.6 \text{ i } 0.7)$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli I, kada na sistem deluje poremećaj, u trenutku  $t=30s$ , oblika odskočne funkcije čija je amplituda 10.



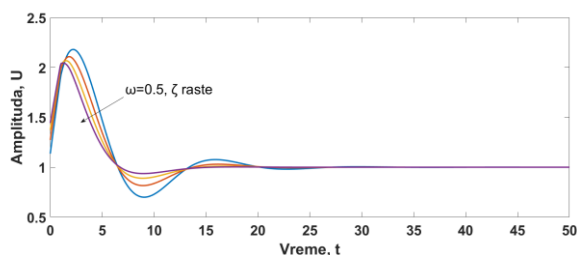
Sl. 6. Odziv sistema za  $\omega_n=0.5$ , i  $\zeta \in (0.4, 0.5, 0.6 \text{ i } 0.7)$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli II, kada na sistem deluje poremećaj, u trenutku  $t=30s$ , oblika odskočne funkcije čija je amplituda 10.

Prilikom izbora željenih polova, treba se rukovoditi ne samo brzinom odziva i dobrom prelaznom karakteristikom, već se, ukoliko je sistem izložen poremećajima, mora paziti i na robustnost sistema. Uticaj poremećaja na posmatrani sistem prikazan je na Sl. 5. i Sl. 6. Ukoliko je željeni realni i imaginarni deo pola, koji je u funkciji  $\zeta$  i  $\omega_n$ , izabran tako da poveća brzinu odziva, za posledicu ima veći preskok prelazne karakteristike, ali i brže smirenje sistema pod dejstvom poremećaja. S obzirom da su ove dve veličine u kontradikciji, parametre regulatora treba izabrati tako da što bolje zadovolje oba uslova.

Važnu ulogu pri izboru parametara, za projektovanje PI, ima i vrednost upravljačkog signala koji dobijamo na izlazu regulatora. Za posmatrane  $\zeta$  i  $\omega_n$ , i dobijene parametre PI regulatora, upravljački signali prikazani su Sl.7. i Sl. 8.



Sl. 7. Upravljački signal  $u(t)$ , za  $\zeta=0.7$ , i  $\omega_n \in (0.4, 0.5, 0.6 \text{ i } 0.7)$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli I.



Sl. 8. Upravljački signal  $u(t)$ , za  $\omega_n=0.5$ , i  $\zeta \in (0.4, 0.5, 0.6 \text{ i } 0.7)$  sa parametrima PI regulatora datim u Tabeli II

#### V. UPOREDNE KARAKTERISTIKE SA SMITOVIM PREDIKTOROM

Za dve različite vrednosti  $\zeta$  i  $\omega_n$ , razmatranog objekta u sekciji IV, projektovan je PI regulator Lambert W metodom i Smitovim prediktorom. Dobijeni parametri  $K_p$ ,  $K_i$  kao i IAE i ISE praćenja referentnog signala, dati su Tabela III, a karakteristike oba sistema u prelaznom stanju, vreme smirenja ( $T_s$ ), vreme uspona ( $T_r$ ) i vrednost preskoka ( $M_p$ ) pokazuje Tabela IV.

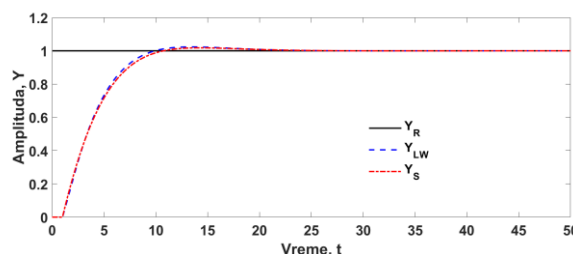
Odskočni odziv regulisanih sistema dat je Sl. 9. Uticaj poremećaja na sistem i promena upravljačkog signala prikazan je na Sl. 10.

TABELA III  
KARAKTERISTIKE PARAMETARA PI REGULATORA I GREŠAKA IAE, ISE

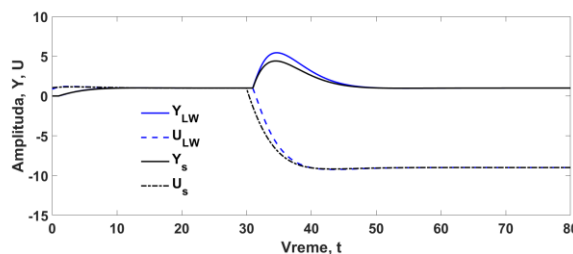
$\zeta$	$\omega_n$	Metoda	$K_p$	$K_i$	IAE	ISE
0.85	0.3	LambertW	0.869	0.274	4.0346	2.6654
		Smith	1.040	0.360	4.0730	2.6613
0.7	0.4	LambertW	1.117	0.450	3.4673	2.2059
		Smith	1.240	0.640	3.4568	2.2417

TABELA IV  
KARAKTERISTIKE REGULATORA U PRELAZNOJ STANJU

$\zeta$	$\omega_n$	Metoda	$T_s$	$T_r$	$M_p$
0.85	0.3	Lambert W	15.6	5.59	2.34
		Smith	9.60	5.97	1.80
0.7	0.4	Lambert W	13.9	3.21	10.9
		Smith	14.1	3.71	7.82



Sl. 9. Odskočni odziv referentnog signala i sistema regulisanih Lambert W metodom i Smitovim prediktorom za  $\zeta=0.85$ , i  $\omega_n=0.3$ .



Sl. 10. Odziv sistema regulisanih Lambert W metodom i Smitovim prediktorom i upravljačkih signala za  $\zeta=0.85$ , i  $\omega_n=0.3$ , kada na sistem deluje poremećaj, u trenutku  $t=30s$ , oblika odskočne funkcije čija je amplituda 10.

#### VI. ZAKLJUČAK

Lambert W funkcija i izložena metoda mogu se koristiti za projektovanje PI regulatora kod stabilnih FOPTD iz razloga što regulisani sistem pokazuje dobre karakteristike, ne samo u prelaznom stanju, već i u slučaju da na isti deluje poremećaj. S obzirom da ne postoji značajna razlika u radu sistema regulisanih ovako dizajniranim PI regulatorom ili Smitovim prediktorom isti se može upotrebi kao njegova zamena.

U narednom periodu može se analizirati PI regulator primenjen na nestabilne objekte, kao i projektovanje P i PI regulatora za sistema koji imaju integralno dejstvo, primenom Lambert W funkcije.

#### ZAHVALNICA

Ovaj rad je delom realizovan u okviru projekata III 43007 i TR 35005, koje finansira Ministarstvo za prosvetu i nauku Republike Srbije.

#### LITERATURA

- [1] K.J. Åström and T. Hägglund, PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, Research Triangle Park, North Carolina, Instrument Society of America, 1995.
- [2] G. J. Silva, A. Datta, S. P. Bhattacharyya, PID controllers for Time-Delay Systems, Control Engineering, Birkhäuser, Boston, 2005.

- [3] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D.E. Knuth, "On the Lambert W Function," *Advances in Computational Mathematics* 5, pp. 329-359, 1996.
- [4] R. M. Corless, H. Ding, N. J. Higham, D. J. Jeffrey, "The solution of  $S \cdot \exp(S) = A$  is not always the Lambert W function of A.," *ISSAC 2007, Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, New York, pp. 116–121, ACM Press, 2007.
- [5] S. Yi, P. W. Nelson, A. G. Ulsoy, *Timedelay systems: Analysis and control using the Lambert W function*, World Scientific, 2010b.
- [6] G. J. Silva, A. Datta, S. P. Bhattacharyya, "PI stabilization on first-order system with time delay," *Automatica*, vol. 37, pp. 2025-2031, 2001.
- [7] S. Yi, P. W. Nelson, A. G. Ulsoy, "The Lambert W Function Approach to Time Delay Systems and the LambertW\_DDE Toolbox," *Proceedings of the 10th IFAC workshop on time delay systems*, the International federation of automatic control, North eastern university, Boston, USA, 2012
- [8] S. Yi, P. W. Nelson, A. G. Ulsoy, "PI control of first order time delay system via eigenvalue assignment," *IEEE Transactions on Control System Tehnology*, vol. 21 (5), pp. 1586-1594, 2012.
- [9] O. J. Smith, "A controller to overcome dead time," *ISA Journal*, 6 (2), pp. 28-33, 1959.
- [10] S. Armah, S. Yi, "Altitude Regulation of Quadrotor Types of UAVs Considering Communication Delays," *IFAC Papers Online*, vol. 48 (12), pp. 263-268, 2015.
- [11] R. Naragajan, K. Krishnan, C. Monica, "Stability Analysis of a Glucose Insulin Dynamic System Using Matrix Lambert W Function," *British Journal of Mathematics & Computer Science*, vol. 8 (2), pp. 112-120, 2015.
- [12] U. Khristenko, P. L. Tallec, "Delayed Feedback Control Method for calculating space-time periodic solutions of viscoelastic problems," *Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, vol. 3, pp. 4638-4655, 2016.

#### ABSTRACT

The paper describes the regulation by using proportional-integral controller on the first order systems with time delay, where the focus is given to check the stability of the resulting system. Design controllers based on the application of Lambert W function and setting the dominant poles in the desired place in the infinite spectrum of poles system with time delay. The result was obtained by simulation and compared with other well known methods for the design of this controller.

#### **Application of the proportional-integral controller for the systems of the first order with time delay using the Lambert W function for setting poles**

Radmila Gerov, Zoran Jovanović