

$$G_a(s) = \frac{k}{T_a s + 1} e^{-\theta_a s}, \quad (2)$$

gde su:

$$T_a = T_1 + \frac{T_2}{2}, \quad (3)$$

$$\theta_a = \theta + \frac{T_2}{2} + \sum_{j=3}^n T_j + \sum_{i=1}^m T_{oi}. \quad (4)$$

Funkcija prenosa SOPTD modela je opšteg oblika (5):

$$G_b(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_b s + 1)} e^{-\theta_b s}. \quad (5)$$

kod koje su:

$$T_b = T_2 + \frac{T_3}{2}. \quad (6)$$

$$\theta_b = \theta + \frac{T_3}{2} + \sum_{j=4}^n T_j + \sum_{i=1}^m T_{oi}. \quad (7)$$

III. KARAKTERISTIKE SISTEMA U VREMENSKOM DOMENU

Za analizu vremenskih karakteristika i određivanje odskočnih odziva sistema $Y(t)$ i aproksimativnih modela $Y_a(t)$ za FOPTD i $Y_b(t)$ za SOPTD, posmatrani su između ostalih, stabilni sistemi višeg reda dati u Tabeli I, u kojoj je prikazano i vreme smirenja T_s , vreme uspona T_r , kao i IAE i ISE greške odziva između posmatranog sistema i njegovog FOPTD ili SOPTD modela.

Posmatrani sistemi $G(s)$, obeleženi u Tabeli I sa A-J su:

$$\text{A) } \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)}, \text{ B) } \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)^2},$$

$$\text{C) } \frac{1}{(s+1)^3}, \text{ D) } \frac{(-0.4s+1)}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)},$$

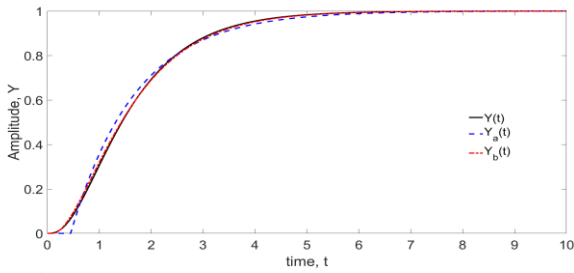
$$\text{E) } \frac{(-s+1)}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)}, \text{ F) } \frac{(-2s+1)}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)},$$

$$\text{G) } \frac{(-2s+1)}{(s+1)^3}, \text{ H) } \frac{e^{-s}}{(6s+1)(2s+1)(s+1)},$$

$$\text{I) } \frac{e^{-5s}}{(s+1)^4}, \text{ J) } \frac{(-s+1)e^{-s}}{(6s+1)(2s+1)^2}.$$

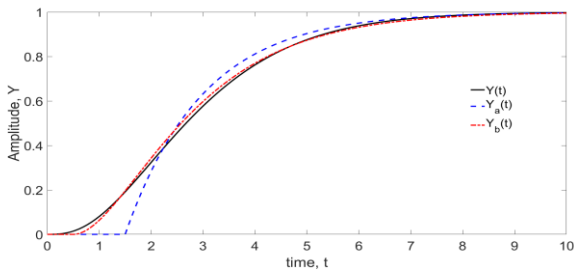
TABELA I
VREME SMIRENJA I USPONA SISTEMA I MODELA, IAE I ISE MODELA

$G(s)$		T_s	T_r	IAE	ISE
A	$G(s)$	4.82	2.65		
	$G_a(s)$	5.34	2.75	0.1133	0.0033
	$G_b(s)$	4.9	2.73	0.0270	0.0002
B	$G(s)$	5.28	2.91		
	$G_a(s)$	5.64	2.75	0.1312	0.0056
	$G_b(s)$	5.4	2.95	0.0331	0.0003
C	$G(s)$	7.52	4.22		
	$G_a(s)$	7.37	3.3	0.2984	0.0235
	$G_b(s)$	7.93	4.24	0.0868	0.0012
D	$G(s)$	5.1	2.56		
	$G_a(s)$	5.74	2.75	0.1240	0.0033
	$G_b(s)$	5.3	2.73	0.0876	0.0025
E	$G(s)$	5.26	2.44		
	$G_a(s)$	6.34	2.75	0.4453	0.0605
	$G_b(s)$	5.9	2.73	0.4513	0.0654
F	$G(s)$	5.38	2.35		
	$G_a(s)$	7.34	2.75	1.5466	0.6068
	$G_b(s)$	6.9	2.73	1.5486	0.6168
G	$G(s)$	8.38	3.67		
	$G_a(s)$	9.37	3.3	0.9973	0.2019
	$G_b(s)$	9.93	4.24	0.9887	0.1679
H	$G(s)$	28	14.6		
	$G_a(s)$	30.4	15.4	0.5181	0.0135
	$G_b(s)$	28.2	14.9	0.0982	0.0006
I	$G(s)$	14.1	4.94		
	$G_a(s)$	13.4	3.3	0.5101	0.0520
	$G_b(s)$	13.9	4.24	0.2251	0.0096
J	$G(s)$	30.2	15.2		
	$G_a(s)$	32.4	15.4	0.5131	0.0139
	$G_b(s)$	30.6	15.5	0.1250	0.0007



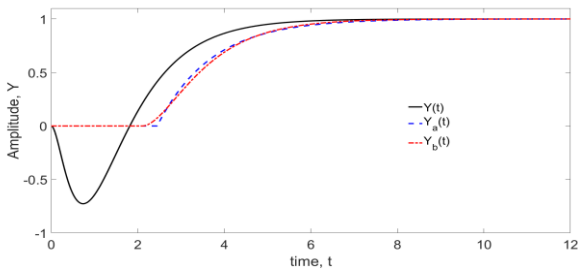
Sl. 1. Odskočni odziv sistema opisanog u Tabeli I pod A) i njegovih modela.

Greška odziva sistema, koji ima realne i različite polove, Tabela I pod A), i modela, praktično je zanemarljiva Sl. 1. Kod sistema sa višestrukim polovima Tabela I pod B) i C) greška aproksimacije je nešto veća Sl. 2.



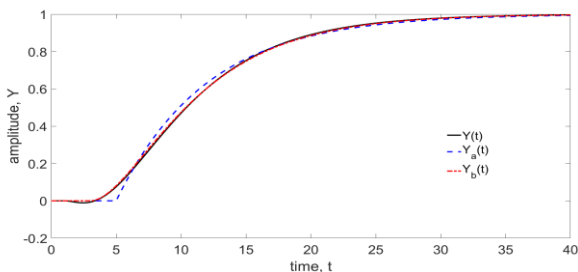
Sl. 2. Odskočni odziv sistema opisanog u Tabeli I pod C) i njegovih modela.

Ukoliko je sistem neminimalno fazni, Tabela I pod D), E), F), G) greška kod oba modela, je znatno veća nego u prethodnim slučajevima i raste se sa porastom vremenske konstante koja definiše nule sistema, što se jasno vidi na Sl. 3.



Sl. 3. Odskočni odziv sistema opisanog u Tabeli I pod F) i modela.

Iz odziva sistema sa transportnim kašnjenjem, Tabela I pod H), I), J) i njegovih modela, može se zaključiti da obe aproksimacije daju dobre rezultate Sl. 4.



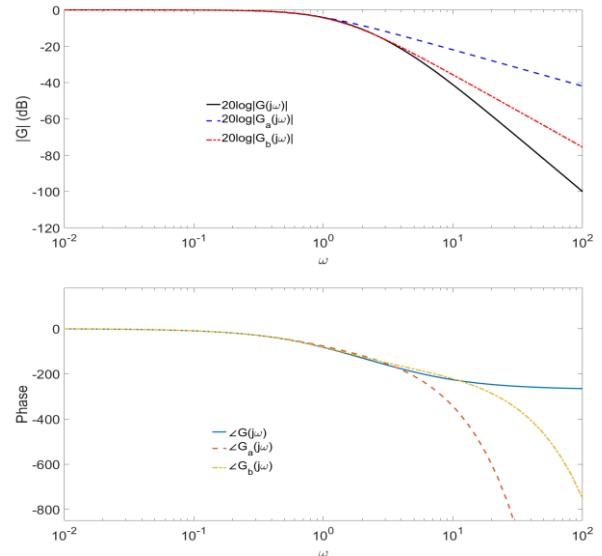
Sl. 4. Odskočni odziv sistema opisanog u Tabeli I pod J) i modela.

Na osnovu napred iznetog, može se zaključiti da se obe aproksimacije mogu koristiti, da SOPTD daje bolje rezultate od FOPTD i da kod neminimalnofaznih sistema treba voditi računa o odnosu T_0 i T_1 , iz razloga što sa porastom T_0 rastu

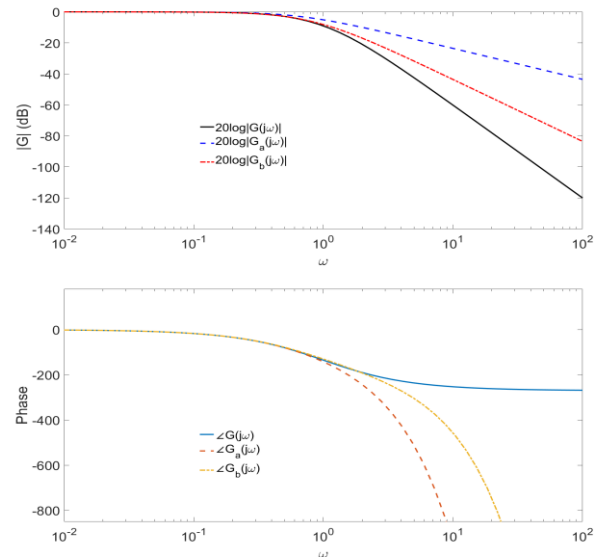
IAE i ISE koje za vrednosti $T_0 \gg T_1$ ne bi bile zanemarljive.

IV. FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE SISTEMA I MODELA

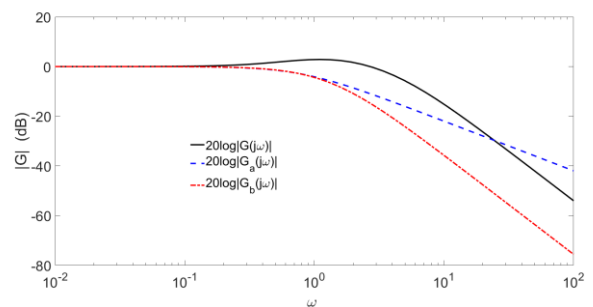
Posmatranjem frekventijskog odziva sistema i odgovarajućih FOPTD i SOPTD modela, Sl. (5.-8.) uočava se da aproksimacija ne daje dobre rezultate na višim učestanostima, što nije od prevelikog značaja, jer odstupanja nastaju izvan propusnog opsega sistema.

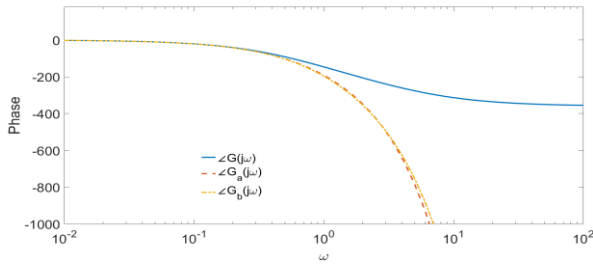


Sl. 5. Frekventijske karakteristike sistema datog u Tabeli I pod A) i modela.



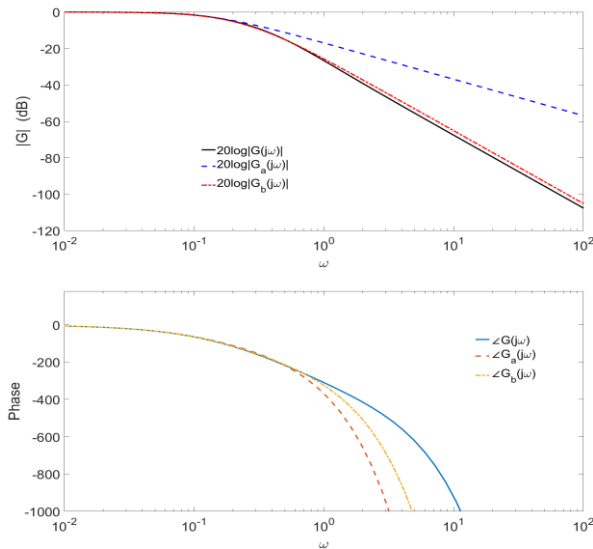
Sl. 6. Frekventijske karakteristike sistema datog u Tabeli I pod C) i modela





Sl. 7. Frekvencijske karakteristike sistema datog u Tabeli I pod F) i modela.

Kod neminimalnofaznih sistema, za $T_0 < T_1$ aproksimacija daje dobre rezultate, što se ne može reći ukoliko je $T_0 > T_1$ zbog značajnog odstupanja frekvencijskih karakteristika sistema i modela Sl. 7.



Sl. 8. Frekvencijske karakteristike sistema datog u Tabeli I pod J) i modela.

V. DISKRETNİ MODEL I NJEGOVE KARAKTERISTIKE

Za nalaženje ekvivalentne diskretne funkcije i rekonstrukciju signala koristi se ZOH pri čemu se kod izbora periode diskretizacije mora voditi računa o Shannonovoj teremi odabiranja [4]. Diskretni model polaznog sistema i diskretni FOPTD i SOPTD modeli dobijeni z-transformacijom ili modifikovanom z-transformacijom, ukoliko sistem ima transportno kašnjenje, dati su respektivno sa (8), (9), (10) gde je $G_{ho}(s)$ funkcija prenosa ZOH.

$$G(z) = Z[L^{-1}\{G_{ho}(s)G(s)\}] \quad (8)$$

$$G_a(z) = Z_m[L^{-1}\{G_{ho}(s)G_a(s)\}] \quad (9)$$

$$G_b(z) = Z_m[L^{-1}\{G_{ho}(s)G_b(s)\}] \quad (10)$$

Poznato je da raspored polova i nula diskretnih sistema zavisi od brzine diskretizacije tj. periode odabiranja T , kao i da povećanje brzine diskretizacije može dovesti do nestabilnih nula diskretnog modela [4]. Kod brze diskretizacije $T \rightarrow 0$, nule diskretnog modela, koje nastaju isključivo kao posledica

diskretizacije, a čiji je broj jednak $n-m-1$, gde je n stepen polinoma u imeniocu funkcije prenosa kontinualnog sistema, a m stepen polinoma u brojiocu istog, teže nulama Euler-Frobenius polinoma [8], dok se m nula kontinualnog sistema preslikava u $z=1$ [7]. Zbog prisustva nule izvan jediničnog kruga u z -ravni, stabilan invertibilan kontinualan sistem može postati neinvertibilan (nestabilno inverzan) [7].

Da bi se sačuvala informacija posle diskretizacije, neophodno je da je perioda odabiranja $T < T_k$, gde je T_k vremenska konstanta koja definiše prisustvo realnog pola kontinualnog sistema $s = -1/T_k$, takođe, ona mora biti manja od transportnog kašnjenja da se ne bi izgubila informacija o trenutnoj vrednosti upravljane promenljive. Ukoliko je diskretizacija brza tj. $T \ll T_k$, širi se Nikvistovo područje učestanosti pa će preslikani pol biti unutar jediničnog kruga u z -ravni blizu tačke $z=1$ [5].

Neka je izabrana perioda diskretizacije $T=0.1s$, za sistem dat u Tabela I pod A) i njegov FOPTD i SOPTD model, kod koga je kritična perioda odabiranja $T_{kr}=3.2465s$. Odgovarajući diskretni modeli (9), (10) i (11) su:

$$G(z) = \frac{0.0013693 (z+3.068) (z+0.2185)}{(z-0.9048) (z-0.8187) (z-0.6065)}$$

$$G_a(z) = z^{-5} \frac{0.039211 (z+0.9608)}{(z-0.9231)}$$

$$G_b(z) = z^{-1} \frac{0.007629 (z+0.9149)}{(z-0.9048) (z-0.8465)}$$

Ukoliko je perioda diskretizacije $T=0.4s$, istog sistema, odgovarajući diskretni modeli su:

$$G(z) = \frac{0.050526 (z+1.79) (z+0.1135)}{(z-0.6703) (z-0.4493) (z-0.1353)}$$

$$G_a(z) = z^{-2} \frac{0.24422 (z+0.1213)}{(z-0.7261)}$$

$$G_b(z) = z^{-1} \frac{0.05775 (z+1.691)(z+0.03211)}{(z-0.6703) (z-0.5134)}$$

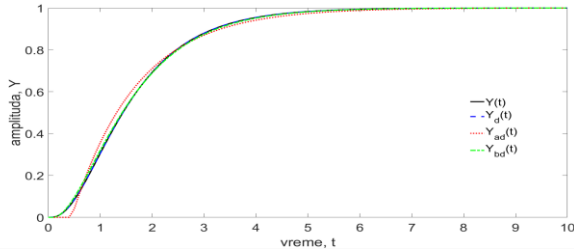
Iz diskretnih funkcija prenosa uočava se da se svi polovi nalaze unutar jediničnog kruga u z -ravni i da su za $T=0.1s$ preslikani blizu tačke $z=1$, što nije slučaj za $T=0.4s$. Za obe izabrane periode, jedna nula diskretnog modela $G(z)$ je nestabilna, nalazi se izvan jediničnog kruga, što dobije sistem čini neinvertibilnim. Minimalno fazni invertibilan diskretni model, može se dobiti sporijom diskretizacijom, tako da su za $T=0.8s$ odgovarajući modeli:

$$G(z) = \frac{0.21012 (z+0.9663) (z+0.04426)}{(z-0.4493) (z-0.2019) (z-0.01832)}$$

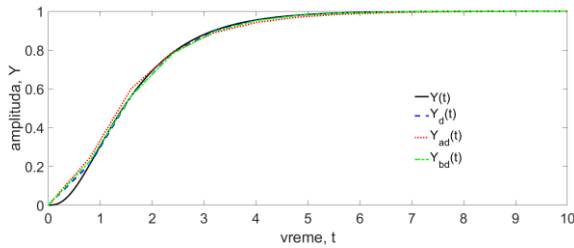
$$G_a(z) = z^{-1} \frac{0.24422(z+0.9356)}{(z-0.5237)}$$

$$G_b(z) = z^{-1} \frac{0.22564(z+0.7863)(z+0.006084)}{(z-0.4493)(z-0.2636)}$$

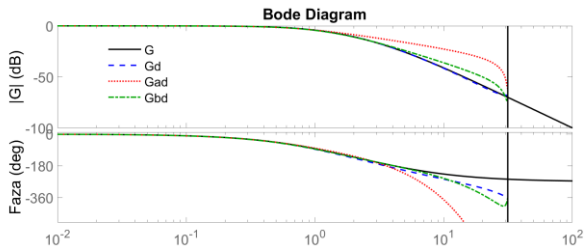
Odskočni odziv posmatranog sistema $G(s)$ označen sa $Y(t)$ kao i odzivi diskretnih modela $G(z)$, $G_a(z)$, $G_b(z)$, označeni sa $Y_d(t)$, $Y_{ad}(t)$, $Y_{bd}(t)$, prikazani su Sl. 9, Sl. 10.



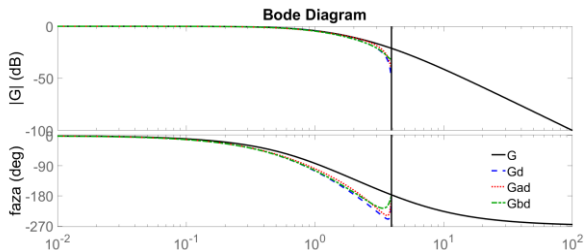
Sl. 9. Odziv sistema Tabela I pod A) i diskretnih modela za $T=0.1s$.



Sl. 10. Odziv sistema Tabela I pod A) i diskretnih modela za $T=0.8s$.

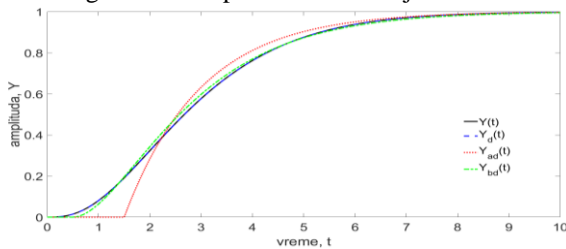


Sl. 11. Frekvencijske karakteristike sistema Tabela I pod A) za $T=0.1s$.

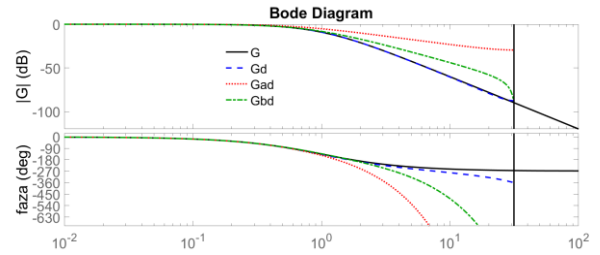


Sl. 12. Frekvencijske karakteristike sistema Tabela I pod A) za $T=0.8s$.

Na Sl. 11. i Sl. 12. prikazane su frekvencijske karakteristike posmatranog sistema za periodu odabiranja $T=0.1s$ i $T=0.8s$.



Sl. 13. Odziv sistema Tabela I pod C) i diskretnih modela za $T=0.1s$.



Sl. 14. Frekvencijske karakteristike sistema Tabela I pod C) za $T=0.1s$.

Za sistem koji ima samo višestruke polove, Tabela I pod C) odskočni odziv za $T=0.1s$ prikazan je Sl. 13. dok su frekvencijske karakteristike date Sl. 14.

Može se zaključiti, kao i kod kontinualnog sistema, da je odstupanje karakteristika veće nego u prethodnom primeru, kao i da veću grešku pokazuje FOPTD.

Raspored polova i nula diskretnih modela za ovaj sistem za različite periode diskretizacije prikazan je Tabela II. Može se uočiti da se kod brže diskretizacije polovi preslikavaju blizu tačke $z=1$, a da se nule diskretnih sistema, nastale kao posledica diskretizacije, približavaju jediničnom krugu z -ravni kod sporije diskretizacije.

TABELA II
RASPRED POLOVA I NULA DISKRETNIH MODELA SISTEMA DATOG U TABELI I
POD C) ZA RAZLIČITE PERIODE DISKRETIZACIJE

T	$G(z)$ nula	$G(z)$ pol	$G_a(z)$ nula	$G_a(z)$ pol	$G_b(z)$ nula	$G_b(z)$ pol
0.1	-3.463 -0.248	0.905 0.905 0.905		0.935	-0.946	0.935 0.905
0.2	-3.215 -0.230	0.819 0.819 0.819	-0.935	0.875	-5.22 -0.153	0.875 0.819
0.5	-2.579 -0.183	0.606 0.606 0.606		0.716	-0.757	0.716 0.606

Uticaj brzine diskretizacije na raspored polova i nula diskretnih modela za neminimalno fazni sistem Tabela I pod E) dat je Tabela III, a odzivi su prikazani Sl. 15, Sl. 16.

TABELA III
RASPRED POLOVA I NULA DISKRETNIH MODELA SISTEMA DATOG U TABELI I
POD E) ZA RAZLIČITE PERIODE DISKRETIZACIJE

T	$G(z)$ nula	$G(z)$ pol	$G_a(z)$ nula	$G_a(z)$ pol	$G_b(z)$ nula	$G_b(z)$ pol
0.1	1.105 -0.741	0.905 0.819 0.606	-0.961	0.923	-0.915	0.905 0.847
0.3	1.352 -0.411	0.741 0.549 0.223	-4.442	0.787	-9.776 -0.240	0.741 0.606
0.5	1.673 -0.23	0.606 0.368 0.008	-7.408	0.670	-1.314 -0.019	0.606 0.435

VI. ZAKLJUČAK

Redukcija modela sistema visokog reda primenom Skogestad "half rule" metode, kod neminimalnofaznih sistema, kod kojih je $T_0 \gg T_I$, ne daje dobre rezultate, što se vidi iz vremenskih i frekvencijskih karakteristika. Metoda se može koristiti za dobijanje diskretnog modela sistema, pri čemu se, na osnovu položaja polova i nula diskretnog modela može zaključiti da je bolje koristiti sporiju diskretizaciju kojom se istovremeno mogu eliminisati nestabilne nule.

U narednom periodu mogu se razmotriti granični uslovi odnosa T_0/T_I za koje metoda daje dobar rezultat. Iz razloga što autor nema saznanja da je vršena analiza uticaja ove metode u z-domenu, kao i da je metod korišćen kod projektovanja digitalnih regulatora i to se može uzeti u razmatranje.

LITERATURA

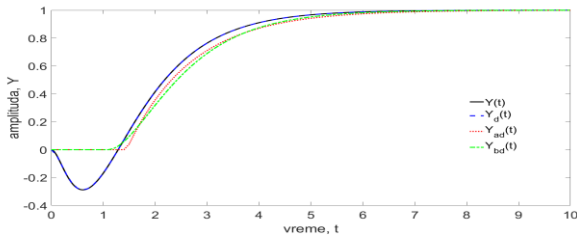
- [1] M. R. Stojić, Sistemi automatskog upravljanja, Niš, Srbija, Elektronski fakultet u Nišu, 2004.
- [2] D. E. Seborg, T. F. Edgar, D. A. Mellichamp, Process Dynamics and Control, 2th ed, New York, United State of America, John Wiley & Sons, 2004.
- [3] S. Skogestad, "Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning," Journal of Process Control 13, 2003.
- [4] M. B. Naumović, Projektovanje sistema automatskog upravljanja, Niš, Srbija, Elektronski fakultet u Nišu, 2005.
- [5] M. R. Stojić, Digitalni sistemi upravljanja, 3. Izmenjeno i dopunjeno izdanje, Beograd, Srbija, IP "Nauka," 1994.
- [6] M. B. Naumović, "Neke preporuke za izbor periode diskretizacije u sistemima automatskog upravljanja," Zbornik radova III Simpozijuma INDEL2000, Banjaluka, Republika Srpska, 2000.
- [7] K. J. Åström, B. Wittenmark, Computer-controlled Systems: Theory and Design, 3th ed, New York, United State of America, Prentice-Hall Inc. Upper Saddle River, 1997.
- [8] S. R. Weller, W. Moran, B. Ninness, A. D. Pollington, Sampling Zeros and the Euler-Frobenius Polynomials, Proceedings of 36th IEEE Conference Decision Control, 1997.
- [9] A. B. Guillerna, M. D. Sen, S. A. Quesada, On a root locus-based analysis of the limiting zeros of plants of nominal order at most two under FROH-discretization, Proceedings of American Control Conference, 2005.
- [10] J. I. Yuz, G. C. Goodwin, H. Garnier, Generalised hold functions for fast sampling rate, Proceedings of 43 th. IEEE Conference on Decision and Control, 2004.

ABSTRACT

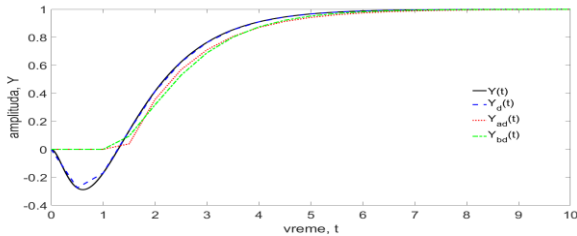
The paper considered a reduction of the high order system with or without time delay into the first order or second order time delay system by using the "Skogestad half rule" method. Time and frequency characteristics of the high order continuous system model were compared with the characteristics of the approximation models. The effect of this reduction method on the dynamics of the corresponding discrete models for different periods of discretization was analyzed, and it was demonstrated that this method could not only be applied to the S domain, but also to the Z domain.

The Analysis of the Skogestad Half Rule Method for Order Reduction of the High Order System Model into the S and Z Domain

Radmila Gerov



Sl. 15. Odziv sistema Tabela I pod E) i diskretnih modela za $T=0.1s$.



Sl. 16. Odziv sistema Tabela I pod E) i diskretnih modela za $T=0.5s$.

Kod sporije diskretizacije Sl. 16. jasno se vidi odstupanje kontinualnog odziva sistema od diskretnih modela.

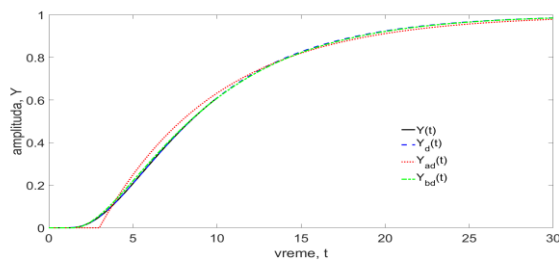
Za sistem sa transportnim kašnjenjem Tabela I pod H), raspored polova i nula diskretnih modela prikazan je za različitu brzinu diskretizacije u Tabeli IV.

TABELA IV

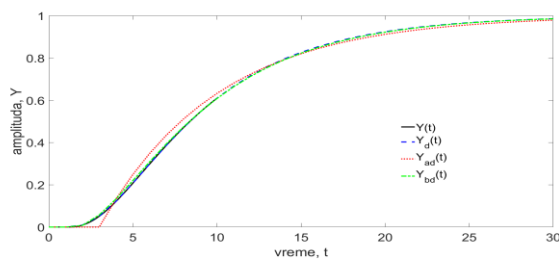
RASPORED POLOVA I NULA DISKRETNIH MODELA SISTEMA DATOG U TABELI I POD H) ZA RAZLIČITE PERIODE DISKRETIZACIJE

T	$G(z)$		$G_a(z)$		$G_b(z)$	
	nula	pol	nula	pol	nula	pol
0.5	-3.043 -0.217	0.92 0.779 0.606		0.931	-0.909	0.92 0.819
1	-2.503 -0.174	0.846 0.606 0.368		0.867	-4.842 -0.141	0.846 0.670

Odziv ovog sistema dat je Sl. 17. i Sl. 18.



Sl. 17. Odziv sistema Tabela I pod H) i diskretnih modela za $T=0.5s$.



Sl. 18. Odziv sistema Tabela I pod H) i diskretnih modela za $T=1s$.