

Фреквенцијска анализа фракционог модела електричног вода

Стеван М. Цветићанин, Душан Зорица, Милан Р. Рапаић

Абстракт—Математички модел електричног вода формулисан је тако да су, коришћењем фракционог рачуна, укључени меморијски ефекти индуктивних и капацитивних феномена, који у класичном моделу нису узети у обзир. Тополошким уопштењем елементарног кола, извршеног додавањем кондензатора паралелно везаног са отпорником у редној грани елементарног кола електричног вода, у обзир је узет и ефекат нагомилавања наелектрисања дуж проводника. Фреквенцијска анализа функције преноса модела представља главни задатак овог рада.

I. Увод

Уочено је да су модели са изводима нецелог (фракционог) реда веома погодни за описивање електричних и магнетских феномена. На пример, капацитивности и индуктивности фракционог реда су разматране у [1]–[7], док су електрични водови моделирани изводима фракционог реда проучавани у [8]. Фракциони изводи су се показали изузетно ефикасним за моделирање, између осталог, тракастих микро-водова ("microstrip lines") на учесталостима реда терахерца, као и за "CRLHT-line" ("composite right/left-handed transmission line"), види [9], [10].

Овај рад је наставак истраживања недавно објављеног у [8] у коме је разматран уопштени модел електричног вода. У [8] је претпостављено да се процеси поларизације и магнетизације не дешавају тренутно. Да би се уважиле ове претпоставке, у Хевисајдовом елементарном колу су класичне капацитивности и индуктивности замењене капацитивностима и индуктивностима фракционог реда. Разматрано је и нагомилавање наелектрисања дуж проводника. Овај ефекат је узет у обзир модификовањем топологије елементарног кола додавањем (фракционе) капацитивности у редну грану елементарног кола.

Резултујући модел електричног вода са меморијским и ефектима нагомилавања наелектрисања, математички је представљен уопштеном временски фракционом једначином телеграфичара, која је изведена,

С. М. Цветићанин (stevan.cveticanin@uns.ac.rs), М. Р. Рапаић (гараја@uns.ac.rs) – Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Србија

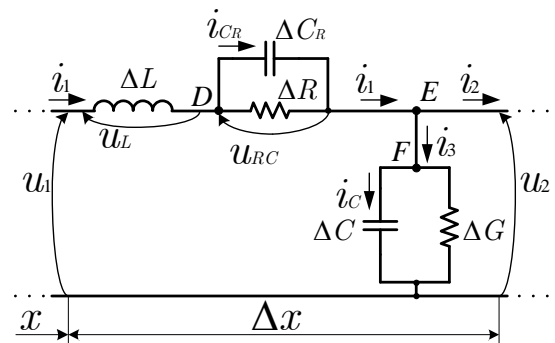
Д. Зорица (dusan_zorica@mi.sanu.ac.rs) – Математички институт Српске академије наука и уметности, Кнеза Михаила 36, 11001 Београд, Србија – Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Департман за физику, Трг Доситеја Обрадовића 3, 21000 Нови Сад, Србија

анализирана и решена у [8]. Важно је нагласити да се уопштеном фракционом једначином телеграфичара могу описати оба типа процеса, дифузни и таласни, у зависности од вредности параметара. Слични модели који описују дифузне и таласне феномене су већ публиковани у многобројној литератури, види нпр. [11]–[13]. У овом раду, анализа спроведена у [8] проширена је разматрањем својстава уопштеног фракционог модела електричног вода у фреквенцијском домену.

Рад је организован на следећи начин: у одељку II представљене су једначина и функција преноса, које описују уопштени фракциони модел електричног вода; у одељку III дати су аналитички изрази зависности модула и аргумента функције преноса од учесталости; одељак IV се састоји од графичких приказа нумеричких примера и њихове дискусије; и на крају одељак V је резервисан за закључак.

II. Уопштени фракциони модел електричног вода

У овом одељку укратко су представљени резултати фракционог и тополошки уопштеног математичког модела електричног вода, узимајући као основ елементарно коло приказано на слици 1. Као резултат



Слика 1. Елементарно коло уопштеног модела електричног вода.

добијена је уопштена фракциона једначина телеграфичара

$$\begin{aligned}
 & (\tau LC {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau LG {}_0D_t^{\alpha+\beta} + LC {}_0D_t^{\alpha+\gamma} \\
 & \quad + LG {}_0D_t^{\alpha} + RC {}_0D_t^{\gamma} + RG) u(x, t) \\
 & = \left(\tau {}_0D_t^{\beta} + 1 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (1)
 \end{aligned}$$

где су R и L подужна редна отпорност и подужна редна индуктивност, док су G и C подужна оточна проводност и подужна оточна капацитивност, респективно. Са $\tau = RC_R$ је означена додатна позитивна константа повезана са ефектом нагомилавања наелектрисања. Константе $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ представљају ред диференцирања у конститутивним релацијама фракционих индуктивних феномена и фракционих редних и оточних капацитивних феномена, респективно.

Добро је познато из теорије електричних кола, види [14], [15], да је функција преноса (полу)бесконечног вода дата следећим изразом

$$W_\infty(x, s) = e^{-xk(s)}, \quad (2)$$

где је $k(s) = \sqrt{\psi(s)} = \sqrt{Z(s)Y(s)}$ коефицијент пропагације, а $Z(s)$ и $Y(s)$ представљају редну подужну импедансу и паралелну подужну адмитансу, респективно. Функција $\psi = k^2$ одређена је топологијом елементарног кола, слика 1, као и конститутивним релацијама сваког појединачног електричног елемента који се налази у елементарном колу. Функција ψ , која одговара елементарном колу са слике 1, дата је изразом

$$\psi(s) = \frac{(s^{\alpha+\beta} + as^\alpha + b)(s^\gamma + 1)}{s^\beta + a}, \quad (3)$$

где су a и b позитивне константе, дефинисане параметрима L, R, C, G, C_R , као и нормализацијом и бездимензионисање фракционог математичког модела електричног вода. За детаље погледати [8]. Приликом испитивања својстава функције преноса, важно је имати на уму да су и сингуларитети и нуле функције ψ , дате (3), представљају тачке гранања функције преноса W_∞ , дате (2).

III. Фреквенцијска анализа

У сврху припреме за фреквенцијску анализу, у израз (3) је уведена смена $s = i\omega$, након чега су реални и имагинарни део функције ψ раздвојени и изражени као функције кружне учесталости ω на следећи начин

$$\operatorname{Re} \psi(\omega) = \frac{1}{|\omega^\beta e^{i\beta\frac{\pi}{2}} + a|^2} C(\omega), \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} \psi(\omega) = \frac{1}{|\omega^\beta e^{i\beta\frac{\pi}{2}} + a|^2} S(\omega), \quad (5)$$

где су помоћне функције C и S дефинисане изразима

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \omega^{\alpha+2\beta+\gamma} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} \\ &+ \omega^{\alpha+2\beta} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \\ &+ 2a\omega^{\alpha+\beta+\gamma} \cos \frac{\beta\pi}{2} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} \\ &+ 2a\omega^{\alpha+\beta} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ &+ a^2\omega^{\alpha+\gamma} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} \\ &+ b\omega^{\beta+\gamma} \cos \frac{(\beta-\gamma)\pi}{2} \\ &+ a^2\omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + b\omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ &+ ab\omega^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2} + ab, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \omega^{\alpha+2\beta+\gamma} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} \\ &+ \omega^{\alpha+2\beta} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \\ &+ 2a\omega^{\alpha+\beta+\gamma} \cos \frac{\beta\pi}{2} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} \\ &+ 2a\omega^{\alpha+\beta} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ &+ a^2\omega^{\alpha+\gamma} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} \\ &- b\omega^{\beta+\gamma} \sin \frac{(\beta-\gamma)\pi}{2} \\ &+ a^2\omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} - b\omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \\ &+ ab\omega^\gamma \sin \frac{\gamma\pi}{2}. \end{aligned}$$

Елементарним правилима комплексне алгебре, за реални и имагинарни део $k(\omega) = \sqrt{\psi(\omega)}$ добија се

$$\operatorname{Re} k(\omega) = \sqrt{\frac{|\psi(\omega)| + \operatorname{Re} \psi(\omega)}{2}}, \quad (6)$$

$$\operatorname{Im} k(\omega) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \psi(\omega)) \sqrt{\frac{|\psi(\omega)| - \operatorname{Re} \psi(\omega)}{2}}. \quad (7)$$

Фреквенцијска зависност модула и аргумента функције преноса одређена је изразима

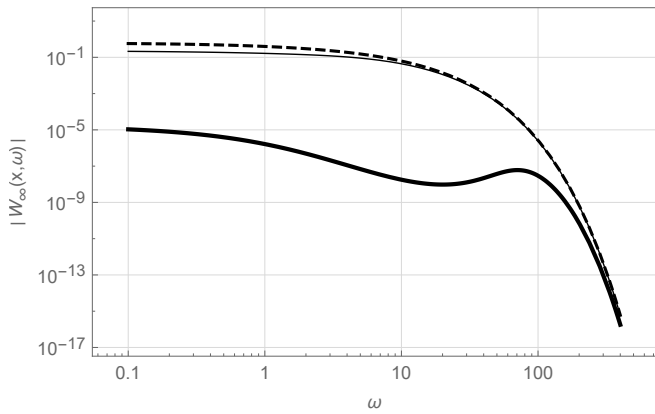
$$|W_\infty(x, \omega)| = e^{-x \operatorname{Re} k(\omega)}, \quad (8)$$

$$\arg W_\infty(x, \omega) = -x \operatorname{Im} k(\omega). \quad (9)$$

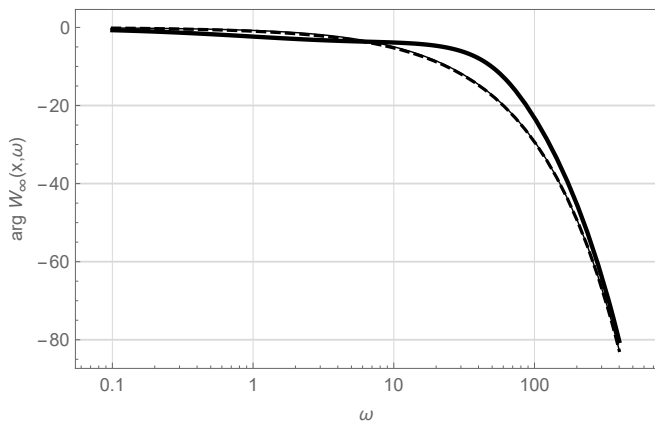
IV. Примери и дискусија

У овом одељку дати су примери и дискусија фреквенцијске анализе модула и аргумента функције преноса у зависности од броја, положаја и природе њених тачака гранања.

Слике 2 и 3 показују фреквенцијску зависност модула (8) и аргумента (9) функције преноса. На оба графика су приказане по три криве које одговарају различитом броју, природи и положају тачака гранања функције преноса. У првом случају (испрекидана линија) функција преноса нема других



Слика 2. Фреквенцијска зависност модула функције преноса на дискретној позицији $x = 1$ за $\alpha = \frac{5}{6}$, $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b_{nbp} = 1$, $b_{rbp} = 9$ и $b_{ccbP} = 500$.



Слика 3. Фреквенцијска зависност аргумента функције преноса на дискретној позицији $x = 1$ за $\alpha = \frac{5}{6}$, $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b_{nbp} = 1$, $b_{rbp} = 9$ и $b_{ccbP} = 500$.

тачка гранања осим $s = 0$. У том случају карактер импулсног одзива је апериодичан. У другом случају (пуна танка линија) функција преноса, поред $s = 0$, поседује негативну реалну тачку гранања. Тада импулсни одзив има критично апериодичан карактер. У трећем случају (пуна дебела линија) функција преноса, изузев $s = 0$, поседује пар конјуговано комплексних тачака гранања. Импулсни одзив је тада осцилаторан.

На основу слика (2) и (3), очигледно је да је понашање модула и аргумента функције преноса у случајевима када не постоје тачке гранања, или када постоји једна негативна реална тачка гранања, монотонно и да је слично случају када функција преноса има класични реални пол. У случају када функција преноса поседује пар конјуговано комплексних тачака гранања, понашање модула и аргумента је немонотонно и слично ситуацији када функција преноса поседује класичан пар конјуговано комплексних полова.

V. Закључак

Дифренцирање фракционог реда по времену коришћено је како би се описали меморијски ефекат индуктивних и капацитивних феномена и нагомилавање наелектрисања дуж електричног вода. Уопштена фракциона једначина телеграфичара (1) предложена је као математички модел вода, којим би се узели у обзир историја процеса на воду и ефекат нагомилавања наелектрисања. Извршена је фреквенцијска анализа модула и аргумента функције преноса у зависности од броја, природе и положаја њених тачака гранања.

Захвалница

Аутори се захваљују на подршци пројектима ИИИ42004 (СМЦ), 174005 (ДЗ) и ТР32018, ТР33013 (МРР) Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, као и пројекту 114-451-2098 Аутономне покрајине Војводине.

Литература

- [1] A. Dzieliński, G. Sarwas, and D. Sierociuk, "Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models," *Advances in Difference Equations*, vol. 2011:11, pp. 1–15, 2011.
- [2] R. Martin, J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez, "Modeling electrochemical double layer capacitor, from classical to fractional impedance," in *Electrotechnical conference, MELECON 2008, The 14th IEEE Mediterranean*, Ajaccio, Corsica, France, 2008, pp. 61–66.
- [3] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez, "Modeling of an EDLC with fractional transfer functions using Mittag-Leffler equations," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, pp. 807034–1–7, 2013.
- [4] J. A. T. Machado and A. M. S. F. Galhano, "Fractional order inductive phenomena based on the skin effect," *Nonlinear Dynamics*, vol. 68, pp. 107–115, 2012.
- [5] R. S. e, A. Domhardt, and M. Reinhard, "Calculation of electrical circuits with fractional characteristics of construction elements," *Forsch Ingenieurwes*, vol. 69, pp. 230–235, 2005.
- [6] A. G. Radwan and K. N. Salama, "Fractional-order RC and RL circuits," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 31, pp. 1901–1915, 2012.
- [7] I. Schäfer and K. Krüger, "Modelling of coils using fractional derivatives," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 307, pp. 91–98, 2006.
- [8] S. M. Cvetičanin, D. Zorica, and M. R. Rapačić, "Generalized time-fractional telegrapher's equation in transmission line modeling," *Nonlinear Dynamics*, vol. 88, pp. 1453–1472, 2017.
- [9] C. Yang-Yang and S.-H. Yu, "A compact fractional-order model for terahertz composite right/left handed transmission line," in *General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS), 2014 XXXIth URSI, Beijing, 2014*, pp. 1–4.
- [10] Y. Shang, W. Fei, and H. Yu, "A fractional-order RLGC model for terahertz transmission line," in *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (IMS), Seattle, WA, 2013*, pp. 1–3.
- [11] M. R. Rapačić and Z. D. Jeličić, "Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 62, pp. 39–51, 2010.
- [12] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica, "Diffusion wave equation with two fractional derivatives of different order," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, pp. 5319–5333, 2007.
- [13] —, "Time distributed-order diffusion-wave equation. II. Applications of the Laplace and Fourier transformations," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 465, pp. 1893–1917, 2009.

- [14] R. Horvat, Teorija električnih kola. Beograd: Gradjevinska knjiga, 1959.
- [15] B. D. Reljin, Teorija električnih kola II. Beograd: Akademski misao, 2009.

Abstract

Mathematical model of transmission line is formulated using fractional calculus, in order to include the memory effects of capacitive and inductive phenomena, which are not taken into account in the classical model. Topological

generalization of the elementary circuit is performed by introducing a capacitor parallelly connected with resistor in a serial branch of elementary circuit, including the effects of charge accumulation along the transmission line. The aim of this paper is the frequency analysis of transfer function corresponding to this model.

Frequency analysis of fractional transmission line model
S. M. Cvetičanin, D. Zorica, M. R. Rapačić