Dijagonalna reprezentacija jedne klase iracionalnih funkcija prenosa

Milan R. Rapaić, Tomislav B. Šekara, Marko Bošković, Mirna N. Kapetina

***Sažetak*—U ovom radu biće prikazan postupak formiranja dijagonalne reprezentacije modela jedne široke klase linearnih, stacionarnih sistema koji se opisuju neracionalnim funkcijama prenosa. Prikazani postupak će se u potpunosti osloniti na alate klasične kompleksne analize, koji se tradicionalno široko primenjuju u teoriji upravljanja. U tom smislu, opisani postupak se donekle izdvaja od pristupa koji se obično sreću u literaturi, a koji se oslanjaju na teoriju uopštenih funkcija (odnosno distribucija). Smatramo da će ovakav pristup učiniti izlaganje pristupačnijim inženjerima. Biće diskutovani uslovi pod kojima je moguće iracionalnu funkciju prenosa realizovati u dijagonalnoj formi; na osnovu toga, biće prikazano uopštenje Hevisajdovog i Pronijevog razvoja.**

I. UVOD

Difuzna reprezentacija je uvedena 90-tih godina XX veka sa ciljem reprezentacije “nestandardnih” pseudo-diferencijalnih operatora primenom klasičnih, premda beskonačno-dimenzionih, modela u prostoru stanja [1]. Ova reprezentacija se najčešće primenjuje na sisteme necelog reda (frakcione sisteme) [2], ali se sasvim uspešno može primeniti i na druge klase sistema, kao što je i demonstrirano u izvornom radu.

Linearni, vremenski invarijantni, kauzalni sistem impulsnog odziva (jezgra, kernela) $g(t)$ i funkcije prenosa $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ dozvoljava **difuznu reprezentaciju** ako postoji $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ takvo da je

$$g(t) = \int_0^\infty \gamma(\omega) e^{-\omega t} d\omega \; . \tag{1}$$

Funkciju γ nazivamo težinskom funkcijom **difuzne** (odnosno **frekvencijski distribuirane**) **reprezentacije**. Pod određenim uslovima, uvođenjem “funkcije stanja” $x(t,\omega) = \int_0^t g(t-\tau) e^{-\omega\tau} d\tau$, G se može realizovati *frekvencijski distribuiranim modelom u prostoru stanja*, tj. u obliku

$$\frac{\partial x(t,\omega)}{\partial t} = -\omega x(t,\omega) + u(t) \; , \tag{2}$$

$$y(t) = \int_0^\infty \gamma(\omega) x(t,\omega) d\omega \; , \tag{3}$$

gde je (može se pokazati)

$$\gamma(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \Im\{G(-\omega - j\,\varepsilon)\} \; . \tag{4}$$

Valja primetiti da se difuzna reprezentacija može posmatrati kao kontinuum diferencijalnih jednačina prvog reda koje su međusobno potpuno raspregnute. U tom smislu, difuzna reprezentacija je pravo uopštenje dijagonalne forme zapisa matematičkog modela u prostoru stanja. Tek se u jednačini izlaza (3) doprinosi pojedinih ,,stanja”, odnosno ,,modova”, međusobno superponiraju u cilju formiranja izlaza.

Poređenja radi, dijagonalna forma konačno-dimenzionog modela u prostoru stanja glasi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \; , \tag{5}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \; . \tag{6}$$

Pri tome, jednačinu (5) treba porediti sa (2), a jednačinu (6) sa (3). Vektor stanja $\mathbf{x}(t)$ koji figuriše u klasičnom matematičkom modelu u prostoru stanja zamenjuje se funkcijom stanja $x(t,\omega)$ u difuznoj reprezentaciji. Dakle, umesto preslikavanja $[1,\dots,n] \to \mathbb{R}$ (tj. n-dimenzionog vektora) ,,stanjem” se u svakom trenutku vremena smatra beskonačno-dimenziono preslikavanje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (koje možemo interpretirati kao vektor sa kontinuuomom dimenzija). Sa formalnog je aspekta važno napomenuti da se ne može svako takvo preslikavanje smatrati ,,stanjem”, s obzirom da bi neka takva ,,stanja” podrazumevala da sistem u nekom konačnom trenutku sadrži neograničeno mnogo ,,energije”. Stanjima

M. R. Rapaić (rapaja@uns.ac.rs), M. Bošković (marko.boskovic@uns.ac.rs), M. N. Kapetina (mirna.kapetina@uns.ac.rs) – Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija

T. B. Šekara (e-mail: tomi@etf.bg) – Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11020 Beograd, Srbija

ćemo u nastavku smatrati samo kvadratno-integrabilne funkcije. Drugim rečima, dozvolićemo da $x(t,\omega)$ bude stanje posmatranog sistema samo ukoliko je

$$\int_0^\infty |x(t,\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (\forall t \geq 0) \ .$$

Podsećamo čitaoca da kvadratno integrabilne funkcije čine Hilbertov prostor, te da se sa takvim objektima može (u najvećem broju slučajeva) operisati podjednako lako kao sa vektorima konačne dužine.

Difuzna reprezentacija je našla značajnu primenu u analizi i sintezi sistema necelog reda, kako linearnih tako i nelinearnih. Zainteresovanog čitaoca upućujemo na odgovarajuću literaturu [1], [3]–[6]. U ovom radu, prikazaćemo jedan postupak izvođenja uopštene dijagonalne reprezentacije koji se u potpunosti oslanja na klasične alate kompleksne analize. U tom smislu, opisani postupak se donekle izdvaja od izvornog pristupa, koji se oslanjaju na teoriju uopštenih funkcija (odnosno distribucija, videti recimo [7]). Smatramo da će se na ovaj način učiniti izlaganje pristupačnijim. Biće diskutovani uslovi pod kojima je moguće iracionalnu funkciju prenosa realizovati u dijagonalnoj formi; na osnovu toga, biće prikazano uopštenje Hevisajdovog i Pronijevog razvoja [8].

II. Dijagonalna forma

Posmatrajmo linearan, stacionaran, kauzalni sistem sa impulsnim odzivom $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ i funkcijom prenosa $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, gde je sa $\mathcal{L}$ označena Laplasova transformacija. Skupove realnih, odnosno kompleksnih brojeva označavaćemo sa $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, tim redom. Označimo li operaciju konvolucije sa $\star$, poznato je da se odziv $y(t)$ na ,,bilo koju" kauzalnu pobudu $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ može sračunati kao

$$y(t) = (g \star u)(t) = \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau \ . \qquad (7)$$

Uvodimo sledeće pretpostavke, koje jednovremeno čine i dovoljne uslove pod kojima je dijagonalna realizacija moguća. Fizički smisao ovih pretpostavki biće razmatran u nastavku.

Pretpostavka 1. $G(s)$ je analitička na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Pretpostavka 2. $\lim_{s\to 0} sG(s) = 0$.

Pretpostavka 3. $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$

Pretpostavka 4. Granične vrednosti

$$G^{\pm}(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} G(-\omega \pm j\varepsilon)$$

su dobro definisane za svako $\omega > 0$. Postoji apsolutno integrabilna funkcija $\bar{G} : (0,\infty) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takva da je $|G^{\pm}(\omega)e^{-\omega t}| < \bar{G}(\omega, t)$ za skoro svako $\omega > 0$ i skoro svako $t > 0$.

Teorema 1. *Pod pretpostavkama 1–4, važi da je*

$$g(t) = \int_0^\infty \gamma(\omega)e^{-\omega t}d\omega \ . \qquad (8)$$

Odziv sistema na datu pobudu – $u(t)$ *– se može izraziti pomoću* (2), (3), (4).

Dokaz. Impulsni odziv g se može sračunati inverznom transformacijom funkcije prenosa $G(s)$, tj. neposrednim sračunavanjem Bromvičevog integrala

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\ell-j\infty}^{\ell+j\infty} G(s)e^{st}d\,s \quad (\ell > 0) \ . \qquad (9)$$

Zbog pretpostavki 1 i 3, kontura integracije se može deformisati na način prikazan slikom 1, što dovodi do sledećeg, ekvivalentnog izraza (konciznosti radi, podintegralni izraz je ispušten i podrazumeva se da je isti kao u prethodnom izrazu (9))

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD}\right) \ . \qquad (10)$$

Smenom $s = a + \varepsilon e^{j\varphi}$, nalazimo da je

$$\begin{aligned} \left|\int_{BC}\right| &= \left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(a+\varepsilon e^{j\varphi})e^{(a+\varepsilon e^{j\varphi})t}\varepsilon e^{j\varphi}jd\varphi\right| \\ &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\varepsilon G(a+\varepsilon e^{j\varphi})\right| e^{at}d\omega \end{aligned}$$

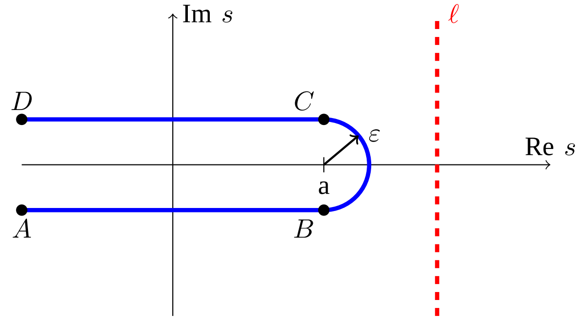
Usled pretpotavke 2 podintegralni izraz teži nuli sa ε. Zaključujemo da $\int_{BC}$ teži nuli. Preostala dva izraza možemo zapisati na sledeći način

$$\int_{AB} + \int_{CD} = \int_0^\infty \Big[G(-\omega - j\varepsilon) - G(-\omega + j\varepsilon)\Big]e^{-\omega t}d\omega \ . \qquad (11)$$

Kako je g realan signal, G mora biti simetrična u odnosu na realnu osu. Posledično, $G(-\omega - j\varepsilon) - G(-\omega + j\varepsilon) = 2j\Im\{G(-\omega - j\varepsilon)\}$, te je

$$g(t) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Im\{G(-\omega - j\varepsilon)\}e^{-\omega t}d\omega \qquad (12)$$

Konačno, operacije iznalaženja granične vrednosti i integracije mogu zameniti mesta. Ovo je moguće jer pretpostavka 4 dozvoljava primenu Teoreme o dominiranoj konvergenciji [9]. Time se neposredno nalaze izrazi (4) i (1).



Slika 1. Kontura integracije pomoću koje je izvedena uopštena difuzna reprezentacija. Kružni deo konture čiji poluprečnik neograničeno raste nije prikazan.

Kombinujući prethodno dobijene izraze sa (7), odziv nalazimo u formi

$$y(t) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \gamma(\omega) e^{-\omega(t-\tau)} d\omega \right) u(\tau) d\tau \ .$$

Konačno, difuznu reprezentaciju (2)–(3) nalazimo zamenom redosleda integracije, što je dopušteno Teoremom Tonelija [9]. Pri tome, uvedena je „*interna*" promenljiva, odnosno „*funkcija stanja*"

$$x(\omega, t) = e^{-\omega t} \star u(t) = \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} u(\tau) d\tau \ .$$

Sasvim se jednostavno porverava da tako uvedene promenljive stanja zadovoljavaju parcijalnu jednačinu dinamike stanja procesa (2), čime je dokaz konačno završen. □

Primedba 1. Umesto formalno korektnog zapisa (4), možemo pisati

$$\gamma(\omega) = \frac{1}{\pi} \Im\{G(\omega e^{-j\pi})\} \ . \tag{13}$$

Iako nenecizniji, ovaj zapis ponekad olakšava sračunavanje koeficijenata dijagonalne reprezentacije.

Posledica 1. *Izraz* (8) *možemo shvatiti kao uopšteni Pronijev razvoj impulsnog odziva. U tom smislu, uvedene pretpostavke predstavljaju dovoljne uslove pod kojima je ovaj razvoj moguć.*

Posledica 2. *Pod uvedenim pretpostavkama funkcija prenosa G dozvoljava uopšteni Hevisajdov razvoj*

$$G(s) = \int_0^\infty \gamma(\omega) \frac{1}{s+\omega} d\omega \ . \tag{14}$$

Primer 1. Posmatrajmo proces opisan parcijalnom diferencijalnom jednačinom

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$$

na polu-beskonačnom domenu $x \geq 0$. Primera radi, q može predstavljati temperaturu veoma dugog tankog štapa, gde se ulaznom promenljivom smatra toplotni fluks početnog poprečnog preseka $x = 0$ (tj. veličina proporcionalna sa $\frac{\partial q}{\partial x}$), a izlaznom promenljivom temperatura nekog, proizvoljno izabranog poprečnog preseka $x = x_0$ (videti, recimo, [10], [11]).

Primenom Laplasove transformacije po vremenskoj promenljivoj parcijalna jednačina provođenja pretvara se u „običnu" diferencijalnu jednačinu u kojoj Laplasova promenljiva figuriše kao parametar,

$$sQ(x,s) - q(x,0) = \frac{\partial^2 Q(x,s)}{\partial x^2} \ .$$

S obzirom da nas u ovom trenutnu zanima funkcija prenosa, početne uslove možemo izjednačiti sa nulom. Rešenje dobijene jednačine neposredno nalazimo u obliku

$$Q(x,s) = A(s) e^{x\sqrt{s}} + B(s) e^{-x\sqrt{s}} \ .$$

S obzirom da mora važiti da je $\lim_{x\to\infty} q(t,x) = 0$, zaključujemo da je $A(s) = 0$. Sa druge strane, ulazni fluks je upravo upravljačka veličina, te je

$$U(s) = \left.\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sqrt{s} B(s) \left. e^{-x\sqrt{s}}\right|_{x=0} \ .$$

Konačno je

$$G(x_0, s) = \frac{Q(x_0,s)}{U(s)} = -\frac{e^{-x_0\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

U nastavku ćemo, bez gubitka opštosti, posmatrati slučaj $x_0 = 1$, dok će negativni predznak biti zanemaren (tj. definisaćemo ulaznu promenljivu kao negativni gradijent raspodele toplote). Drugim rečima, razmatraćemo difuznu reprezentaciju procesa opisanog funkcijom prenosa

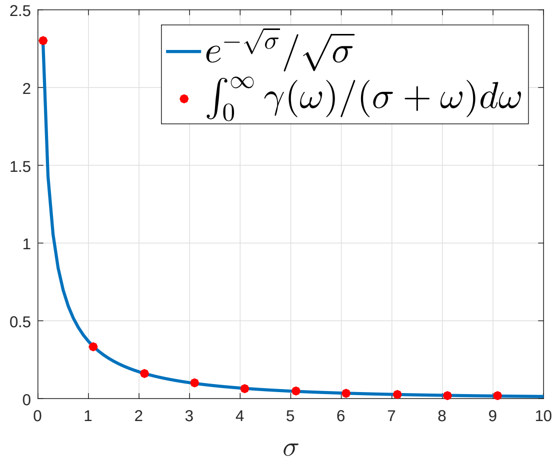
$$G(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \tag{15}$$

Posmatrana funkcija prenosa zadovoljava pretpostavke 1 do 4. Zaista, kako je

$$\begin{aligned} G(\omega e^{-j\pi}) &= \frac{e^{-\sqrt{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}}}{\sqrt{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{e^{j\sqrt{\omega}}}{-j\sqrt{\omega}} = \frac{\cos(\sqrt{\omega}) + j\sin(\sqrt{\omega})}{-j\sqrt{\omega}} \ , \end{aligned}$$

majorizujuću funkciju $\overline{G}(\omega)$ možemo birati (recimo) kao $\overline{G}(\omega) = Ce^{-\omega t}/\sqrt{\omega}$, gde je $C > 1$ slobodan, realan parametar. Neposrednom primenom izraza (13) nalazimo da je

$$\gamma(\omega) = \frac{\cos(\sqrt{\omega})}{\pi\sqrt{\omega}} \ . \tag{16}$$



Slika 2. Slaganje vrednosti funkcije prenosa razmatrane u Primeru 1 sa vrednostima uopštenog Hevisajdovog razvoja. Vrednosti su računate za realne pozitivne vrednosti Laplasove promenljive s.

Tabela I
PRIMERI DIFUZNIH REPREZENTACIJA NEKIH KARAKTERISTIČNIH FUNKCIJA PRENOSA.

$G(s)$	$g(t)$	$\gamma(\omega)$
$\dfrac{1}{s^\alpha}$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\omega^\alpha}$
$\dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{\cos(\sqrt{\omega})}{\pi\sqrt{\omega}}$
$\dfrac{1}{s^\alpha+1}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)$	$\dfrac{\omega^\alpha}{\pi}\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\omega^{2\alpha}+2\cos(\alpha\pi)\omega^\alpha+1}$

$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ označava dvoparametarsku Mitag-Lefle-ovu (*M. G. Mittag-Leffler*) funkciju [2].

Odgovarajući uopšteni Hevisajdov razvoj je

$$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}=\int_0^\infty \frac{\cos(\sqrt{\omega})}{\pi\sqrt{\omega}}\frac{1}{s+\omega}d\omega\ , \tag{17}$$

a odgovarajuća Pronijeva ekspanzija glasi

$$\frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}=\int_0^\infty \frac{\cos(\sqrt{\omega})}{\pi\sqrt{\omega}}e^{-\omega t}d\omega\ . \tag{18}$$

Ilustracija adekvatnosti prikazanog postupka data je slikom 2. Dalji primeri prikazani su u Tabeli I.

III. SMISAO PRETPOSTAVKI

Pretpostavka 1 obezbeđuje da su svi singulariteti funkcije prenosa realni i negativni. Usled toga, difuzna reprezentacija (2) ne sadrži oscilatorne ili nestabilne ,,modove", što bi svakako morao biti slučaj u koliko bi i konjugovano-kompleksni singulariteti bili prisutni.

Služeći se osnovnim svojstvima Laplasove transformacije, Pretpostavka 2 se može zapisati i na sledeći način

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=0\ . \tag{19}$$

Uzete zajedno, pretpostavke 1 i 2 ukazuju da je 0 apscisa konvergencije funkcije prenosa G, ali kazuje i znatno više. Ove pretpostavke obezbeđuju da jezgro $g(t)$ teži nuli kada t raste. Između ostalog, pretpostavka 2 zahteva da, iako $G(s)$ može biti neograničeno u okolini koordinatnog početka, 0 nije pol posmatrane funkcije prenosa.

Pretpostavka 3 kazuje da funkcija prenosa G ima nultu visokofrekvencijsko pojačanje. Ovo je uobičajena pretpostavka izvodljivosti (eng. *realisability*), a takođe je ispunjena za svaku po delovima neprekidno jezgro $g(t)$ [12].

Pretpostavka 4 je uvedena kako bi se ispunili uslovi Teoreme Dominantne Konvergencije u dokazu Teoreme 1. Između ostalog, obezbeđuje da je G ograničena u okolini presečne linije (eng. *branch-cut*) $s\in(\infty,0)$.

IV. SINGULARNE DIFUZNE REPREZENTACIJE

U slučajevima kada jedna ili više pretpostavki 1–4 nije zadovoljena, često je moguće definisati difuznu reprezentaciju, ali u tom slučaju γ valja interpretirati kao uopštenu funkciju, odnosno distribuciju. Detaljna razmatranja izlaze van okvira ovog rada, te dajemo samo jedan ilustrativni primer.

Primer 2. Posmatrajmo konačno-dimenzioni proces, čiji su svi polovi realni i prosti (i koji leže u levoj poluravni), opisanog funkcijom prenosa

$$G(s)=\frac{B_m(s)}{\prod_{j=1}^n(s+a_j)}=\sum_{j=1}^n\frac{A_j}{s+a_j}\ , \tag{20}$$

gde je n red procesa, $B_m(s)$ je polinom sa realnim koeficijentima stepena $m<n$, $a_j>0$ i $A_n\in\mathbb{R}$. Poslednji izraz se može dobiti Hevisajdovim razvojem na parcijalne razlomke. Nije teško zaključiti da se izraz (20) može posmatrati kao specijalan slučaj izraza (3), pri čemu je

$$\gamma(\omega)=\sum_{j=1}^n A_j\delta(\omega+a_j)\ , \tag{21}$$

dok je δ Dirakova delta-distribucija. Impulsni odziv (koji je ujedno predstavlja i Pronijev razvoj) $g(t)=\sum_{j=1}^n A_je^{-a_jt}$

se može dobiti kao specijalan slučaj izraza (8). Svi zaključci slede neposredno na osnovu odabiračkih svojstava impulsne distribucije.

V. Zaključak

U radu je diskutovano jedno uopštenje dijagonalne reprezentacije (tj. realizacije) iracionalnih funkcija prenosa beskonačno-dimenzionim modelom u prostoru stanja u kome su sama stanja elementi Hilbertovog prostora kvadratno-integrabilnih funkcija. Prikazano uopštenje zasnovano je na difuznoj reprezentaciji koji su razvili Monseni, Matinjon i drugi [1], [3], [4], [13] 90-tih godina 20-tog veka. Prikazana dijagonalna reprezentacija nasleđuje lepe osobine dijagonalne reprezentacije racionalnih funkcija prenosa i pogodna je za primene u analizi stabilnosti i projektovanju upravljanja. Ove teme čine osnovni pravac daljih istraživanja.

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju na podršci Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Vlade Republike Srbije, projektima TR32018 (MRR, MNK), TR33013 (MRR), TR33020 (TBŠ).

Literatura

[1] G. Montseny, “Diffusive representation of pseudodifferential time operators,” in *Proceedings of ESAIM Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, vol. 5, 1998, pp. 159–175.

[2] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.

[3] G. Montseny, J. Audounet, and B. Mbodje, “Optimal models of fractional integrators and applications to systems with fading memory,” in *Int. Conf. IEEE Systems, Man and Cybernetics*, 1993.

[4] D. Matignon, “Stability properties for generalized fractional differential systems,” in *Proceedings of ESAIM Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, vol. 5, 1998, pp. 145–158.

[5] G. Dauphin, D. Heleschewitz, and D. Matignon, “Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators,” in *Proceedings of Mathematical Theory on Network Systems (MTNS)*, 2000.

[6] J. C. Trigeassou and N. Maamri, “Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations,” *Signal Processing*, vol. 91, pp. 427–436, 2011.

[7] B. Stanković and S. Pilipović, *Teorija distribucija*. PMF-Novi Sad, 1990.

[8] J. F. Hauer, C. J. Demeure, and L. L. Scharf, “Initial results in prony analysis of power system response signals,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5, no. 1, 1990.

[9] S. Pilipović and D. Seleši, *Mera i integral – Fundamenti teorije verovatnoće*. Zavod za udžbenike, 2012.

[10] R. Curtain and K. Morris, “Transfer functionsof distributed parameter systems:a tutorial,” *Automatica*, vol. 45, no. 5, 2009.

[11] M. N. Kapetina, M. R. Rapaić, and Z.D.Jeličić, “Two’stage adaptive estimation of irrational liner systems,” *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, 2017, article in press.

[12] J. L. Schiff, *The Laplace Transform – Theory and applications*. Springer, 1999.

[13] D. Matignon, “Generalized fractional differential and difference equations: stability properties and modelling issues,” in *Proceeding of Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, 1998, pp. 503–506.

Abstract

An approach of developing a diagonal representation of a broad class of linear, stationary systems will be discussed in the present paper. The approach is completely based on the classical complex analysis framework, which is already widely used in control theory. In this sense, the proposed approach is somewhat different than the related approaches found in literature. We feel that this approach will make the exposition more acceptable to readers with engineering background. The paper discusses conditions under which a diagonal representation is possible; consequently, it also discusses some generalizations of Heaviside and Proni decomposition. Finally, some applications in the analysis, simulation and synthesis of irrational dynamical systems are discussed

Diagonal Representation of a Class of Irrational Transfer Functions

M. R. Rapaić, T. B. Šekara, M. Bošković, M. N. Kapetina