Zbornik radova 49. Konferencije za ETRAN, Budva, 5-10. juna 2005, tom IV
Proc. 49th ETRAN Conference, Budva, June 5-10, 2005, Vol. IV

KINEMATIKA KRUTOG TELA IZRAŽENA POMOĆU KOORDINATA PRIRODNOG TRIEDRA

M. D. Živanović, *Institut Mihajlo Pupin, Beograd, email:milovan@robot,imp,bg.ac.yu*
M. M. Živanović, *Mašinski Fakulet, Beograd, email:dragonfly@verat.net*

Sadržaj *– U radu se rešava zadatak uspostavljanja veze između parametra putanje po kojoj se kreće centar mase predmeta i veličina kojima je opisana kinematika krutog tela u prostoru, pri čemu se pretpostavlja da koordinatni sistem čvrsto vezan za telo ne rotira u odnosu na prirodni triedar putanje.*

1. UVOD

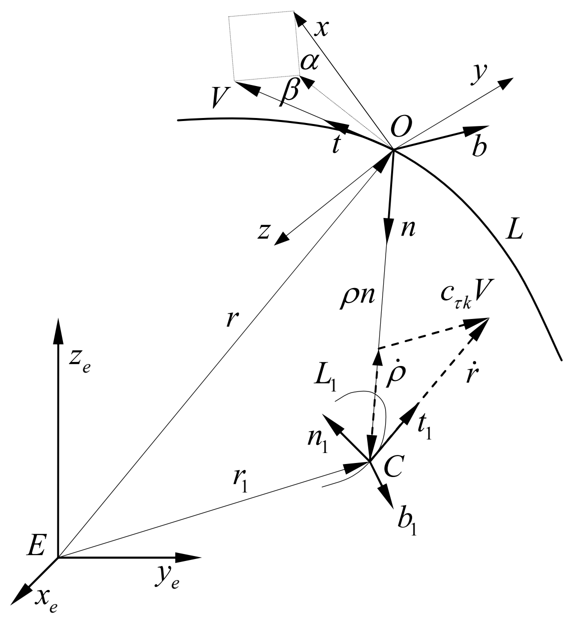
Posmatra se kruto telo koje vrši opšte kretanje u postoru i čiji se CM kreće po liniji L definisanoj radijus vektrom r. Neka je koordinatni početak prirodnog triedra $Otnb$ linije L u tački O koja se poklapa sa CM predmeta. Neka je modul brzine kretanja predmeta V i neka se predmet kreće tako da je njegova orijentacija u odnosu na orijentaciju prirodnog triedra nepromenljiva. Ta razlika orijentacije može se prikazati sa dve uzastopne promene orijentacije za po uglove α i β koordinatnog sistema $Oxyz$ vezanog za telo u odnosu na prirodni triedar $Otnb$ (slika 1.). Pretpostavimo da se krećemo čvrsto vezani za kruto telo. Postavimo sebi zadatak da sintetišemo matematički aparat koji nam omogućava da lako i brzo zaključujemo o karakteristikama sopstvene putanje korišćenjem informacija koje su poznate u koordinatnom sistemu $Oxyz$, sa jedne strane, i da lako i brzo zaključimo o sopstvenoj kinematici na bazi poznavanja tekućih parametara putanje, sa druge strane. Zadatak se svodi na sintezu relacija izmedju parametara krive i veličina kojim je opisana kinematika krutog tela.

2. REŠENJE

Iz matematičke literature su dobro poznati Freneovi obrasci za krivu u prostoru [1,2]

$$\begin{aligned} t' &= kn = \frac{1}{\rho} n \\ n' &= -kt + \tau b = -\frac{1}{\rho} n + \frac{1}{\rho_\tau} b \\ b' &= -\tau n = -\frac{1}{\rho_\tau} n \end{aligned} \tag{1}$$

gde su: t', n', b' izvodi ortova t, n, b osa prirodnog triedra $Otnb$ po luku s linije L, k, τ krivina i torzija linije *L* u tački O i ρ, ρ_τ poluprečnici krivine i torzije te krive. Neka je centar krivine u tački *C*. Neka tačka *C* opisuje krivu L_1. Drugim rečima, kriva L_1 je prostorna evoluta prostorne krive (evolvente) L, dok je L prostorna evolventa prostorne krive (evolute) L_1.



Sl. 1. *Prostorne voluta i evolventa*

Takođe je poznato [2] da je putna ugaona brzina kretanja prirodnog triedra kao krutog tela po krivi L određena vektorom Darbu

$$\Omega = \tau t + kb \tag{2}$$

čiji je modul jednak totalnoj krivini $|\Omega| = \sqrt{\tau^2 + k^2}$ krive L u tački O.

Iz dinamike materijalnih sistema je poznato da postoji korelacija između izvoda apsolutnih koordinata i opterećenja sistema. Stoga potražimo vektorske relacije između radijus vektora i njihovih izvoda u inercijalnom i pokretnom koordinatnom sistemu i parametara definisanih u prirodnom triedru.
Prema slici 1.

$$r_1 = r + \rho n \tag{3}$$

diferenciranje ove relacije po luku s dobija se

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{dr}{ds} + \frac{d\rho}{ds} n + \rho \frac{dn}{ds} \tag{4}$$

kako je $t = r' = dr/ds$ i uzimajući u obzir drugu jednakost (1) ($n' = dn/ds$) dobija se

$$\frac{dr_1}{ds} = t + \rho(-kt + \tau b) + \frac{d\rho}{ds} n \tag{5}$$

znajući da je $\rho = 1/k$, $k \neq 0$, posle množenja obe strane ove jednačine sa $V = ds/dt$

$$\dot{r}_1 = \frac{\tau}{k}b + \dot{\rho}n = V\frac{\omega_t}{\omega_b}b + \dot{\rho}n = c_{\tau k}Vb + \dot{\rho}n \tag{6}$$

gde je $c_{\tau k} = \tau/k,\ k \neq 0$. Pri tom je uzeto da je saglasno (2) ugaona brzina prirodnog triedra određena sa

$$\omega_p = \tau Vt + kVb \tag{7}$$

Nakon diferenciranja relacije (3) po vremenu ima se

$$\dot{r} = \dot{r}_1 - \dot{\rho}n - \rho\dot{n} = \dot{r}_1 - \dot{\rho}n - \rho\frac{dn}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{8}$$

imajući u vidu drugu jednačinu (1) dobija se da je

$$\dot{r} = \dot{r}_1 - \dot{\rho}n - \rho V(-kt + \tau b) \tag{9}$$

što u saglasnosti sa (6) i $\rho k = 1$ rezultuje u

$$\dot{r} = \dot{r}_1 - \dot{\rho}n + Vt - \rho\tau Vb = Vt \tag{10}$$

čime je pokazano da su dobijeni izrazi za brzine vektora r, r_1 i ugaonu brzinu ω_p tačni.

Prethodnim izrazima definisani su apsoutni izvodi vektora r i r_1 po vremenu, odnosno definisane su apsolutne brzine tačaka O i C.

Kretanje tačke O po putanji L možemo predstaviti kao složeno kretanje sastavljeno od prenosnog kretanja tačke C kao pola i relativnog kretanja tačke O u odnosu na pol

$$r = r_1 + \overrightarrow{CO} = r_1 - \rho n, \qquad \overrightarrow{CO} = -\rho n \tag{11}$$

apsolutni izvod ovog vektora je

$$\dot{r} = \dot{r}_1 + \frac{d}{dt}(-\rho n) \quad \Leftrightarrow \quad v = v_p + \Delta v \tag{12}$$

gde su v vektor apsolutne brzine tačake O

$$v = \dot{r} = \frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = Vt \tag{13}$$

v_p vektor apsolutne brzine tačake C

$$v_p = \dot{r}_1 = \dot{\rho}n + c_{\tau k}Vb \tag{14}$$

i Δv vektor razlike ovih brzina, koji određuje apsolutnu brzinu $\Delta v = v_r$ kretanja tačke O u odnosu na pol C određenu izrazom

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{d}{dt}(-\rho n) = -\frac{1}{dt}(d\rho n + \rho dn)\\ &= -\dot{\rho}n - \rho V\frac{dn}{ds}\\ &= -\dot{\rho}n - \rho V(-kt + \tau b)\\ &= Vt - \dot{\rho}n - c_{\tau k}Vb\end{aligned} \tag{15}$$

Uočimo da je prema (5)

$$dr_1 = c_{\tau k}dsb + d\rho n \tag{16}$$

odakle sledi da je

$$dr_1^2 = ds_1^2 = c_{\tau k}^2 ds^2 + d\rho^2 \tag{17}$$

odnosno

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dr_1}{ds}\right)^2 - c_{\tau k}^2 = \frac{\dot{r}_1^2}{V^2} - c_{\tau k}^2 \tag{18}$$

što konačno daje odnos stranica u pravouglom trouglu u normalnoj ravni Onb (slika 1.)

$$\dot{\rho}^2 = \dot{r}_1^2 - (c_{\tau k}V)^2 \tag{19}$$

Relacije (3)-(15) su vektorske i mogu se projektovati na bilo koji koordinatni sistem. Izvršimo projektovanje na ose prirodnog triedra. Ortovi prirodnog triedra definisani sa $t = col(1,0,0)$, $n = col(0,1,0)$ i $b = col(0,0,1)$. Iz (7) sledi da je ugaona brzina prirodnog triedra (odnosno krutog tela) određena sa

$$\omega_p = \begin{pmatrix}\omega_t\\ \omega_n\\ \omega_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau V\\ 0\\ kV\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\tau k}\omega_b\\ 0\\ \omega_b\end{pmatrix} \tag{20}$$

Neka su projekcije radijus vektora r na ose prirodnog triedra r_t, r_n, r_b ($r = col(r_t, r_n, r_b)$). Apsolutni izvod ovog vektora je

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{d_r r}{dt} + \omega_p \times r = \frac{d_r}{dt}\begin{pmatrix}r_t\\ r_n\\ r_b\end{pmatrix} + \begin{vmatrix}t & n & b\\ \tau V & 0 & kV\\ r_t & r_n & r_b\end{vmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dot{r}_{tr}\\ \dot{r}_{nr}\\ \dot{r}_{br}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-kVr_n\\ kVr_t - \tau Vr_b\\ \tau Vr_n\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{21}$$

gde indeks ‘ $_r$ ’ označava relativni (lokalni) izvod u pokretnom koordinatnom sistemu.

Kako je prema (10) projekcija apsolutne brzine $\dot{r}$ radijus vektora r definisana sa $\dot{r} = Vt = col(V,0,0)$ to važe sledeće relacije

$$\begin{aligned}\dot{r}_{tr} - kVr_n &= V\\ \dot{r}_{nr} + kVr_t - \tau Vr_b &= 0\\ \dot{r}_{br} + \tau Vr_n &= 0\end{aligned} \tag{22}$$

odakle se kombinovanjem prve i treće jednakosti dobija relacija

$$k\dot{r}_{br} + \tau\dot{r}_{tr} = \tau V \tag{23}$$

koja tvrdi da je samo na bazi poznavanja lokalnih izvoda $\dot{r}_{tr}, \dot{r}_{br}$ radijus vektora r duž osa t, b i vrednosti krivine k i torzije τ krive L u tekućoj tački O jednoznačno određen modul apsolutne brzine radijus vektora r.

Koordinate radijus vektora $\overrightarrow{CO}$ u prirodnom triedru su $\overrightarrow{CO} = -\rho n = col(0,-\rho,0)$. Apsolutni izvod ovog vektora je definisan sa (15). Ta relacija se može predstaviti sledećim izrazom

$$\frac{d\overrightarrow{CO}}{dt} = v_r = \Delta v = \frac{d_r\overrightarrow{CO}}{dt} + \omega_p \times \overrightarrow{CO}$$

$$= \underbrace{\frac{d_r}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{lokalni \\ izvod}} + \underbrace{\begin{pmatrix} t & n & b \\ \tau V & 0 & kV \\ 0 & -\rho & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{prenosni \\ izvod}} \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ -c_{\tau k}V \end{pmatrix}$$

Relacija (14) za apsolutnu brzinu tačake C može se u prirodnom triedru predstaviti kao

$$v_p = \dot{r}_1 = \dot{\rho} n + c_{\tau k} V b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\tau k} V \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \frac{d_r}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ +\rho \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & n & b \\ +\tau V & 0 & 0 \\ 0 & +\rho & 0 \end{pmatrix}$$

Ovaj izraz se može napisati kao $d_r\overrightarrow{OC}/dt + \omega_{pc} \times \overrightarrow{OC}$, gde je $\overrightarrow{OC} = \rho n = col(0,\rho,0)$ radijus vektor tačke C i koji se može tumačiti na sledeći način: Apsolutni izvod $\dot{r}_1$ radijus vektora r_1 centra krivine C predstavlja zbir čiji je jedan sabirak lokalni izvod vektora $\overrightarrow{OC}$ u triedru $Ct_pn_pb_p$ paralelnom prirodnom triedru $Otnb$ pri čemu je ugaona brzina triedra $Ct_pn_pb_p$ jednaka $\omega_{pc} = col(\tau V, 0, 0)$, dok je drugi sabirak prenosni izvod vektora $\overrightarrow{OC}$ u triedru $Ct_pn_pb_p$. Razlika $\Delta\omega_p$ ugaone brzina ω_p prirodnog triedra $Otnb$ i ugaone brzina ω_{pc} triedra $Ct_pn_pb_p$ je

$$\Delta\omega_{pc} = \omega_p - \omega_{pc} = \begin{pmatrix} \tau V \\ 0 \\ kV \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kV \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\omega_{pc} = \omega_p - \omega_{pc} = kVb$$

odnosno, ugaona brzina rotacije prirodnog triedra $Otnb$ u odnosu na triedar $Ct_pn_pb_p$ je $\Delta\omega_{pc} = \omega_p - \omega_{pc} = kVb$. To znači da prirodni triedar $Otnb$ rotira oko tačke C, kao trenutnog pola rotacije , u ravni određenoj vektorom brzine i položajem pola, odnosno, rotira oko pravca binormale (kao da kliza po oskulatornoj ravani Otn).

Drugim rečima, kao rezime prethodne analize može se konstatovati sledeće.

Za proizvoljan radijus vektor r koji u inercionom koordinatnom sistemu ima hodograf L i modul brzina V ugaona brzina ω_p prirodnog triedra $Otnb$ u ma kojoj tački hodografa određena je vektorom $\omega_p = col(\tau V, 0, kV)$, gde su k i τ krivina i torzija hodografa u toj tački. Hodograf radijus vektora r_1 centara krivine je evoluta L_1 hodografa L, koji je za tu evolutu njena evolventa. Vektor ugaone brzine ω_{pc} triedra $Ct_pn_pb_p$ vezanog za evolutu L_1 jednoznačno je određen i iznosi $\omega_{pc} = col(\tau V, 0, 0) = \tau Vt$ (Slika 2.). Ugaona brzina triedra vezanog za evolutu ω_{pc} jednaka je komponenti ugaone brzine evolvente ω_p u smeru njene tangente, tako da je prirodni triedar evolvente rotira u odnosu na triedar vezan za evolutu ugaonom brzinom $\Delta\omega_{pc} = \omega_p - \omega_{pc} = kVb$.

Od interesa za analizu kretanja tela po putanji su i viši totalni izvodi radijus vektora r i ω_p po vremenu. Totalni izvod $\dot{\omega}_p$ je jednak lokalnom izvodu. Drugi izvod r je

$$\ddot{r} = \frac{d_r\dot{r}}{dt} + \omega_p \times \dot{r} = \frac{d_r}{dt}\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & n & b \\ \tau V & 0 & kV \\ V & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ kV^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V} \\ kV^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_T \\ a_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_b} k\dot{E}_v \\ 2kE_v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

što pokazuje da tangencijalno ubrzanje $a_T = \dot{V}$ predstavlja lokalni deo izvoda, dok normalno ubrzanje $a_N = kV^2 = w_b V$ predstavlja prenosni deo izvoda vektora $\dot{r}$.

U izrazu je uvedena veličina $E_v = V^2/2$ koja se obzirom na $w_b = kV = V/r$ može prikazati kao

$$E_v = \rho^2 \frac{\omega_b^2}{2} \tag{28}$$

Množenjem izraza $E_v = V^2/2$ sa masom m dobija se dobro poznat izraz za kinetičku energiju translacije. Množenjem izraza (28) sa masom dobija se da multiplikator mr^2 množi polovinu kvadrata ugaone brzine kojom prirodni triedar evolvente rotira oko centra krivine. Multiplikator mr^2 je dobro poznati Štajnerov obrazac za položajni moment inercije [3], tako da se izraz za kinetičku energiju translacije u prirodnom triedru može inpretirati kao izraz za kinetičku energiju rotacije oko trenutnog centra krivine putanje, dok se drugi izvod po vremenu $\ddot{r}$ radijus vektora r može posmatrati kao jedinična mera promene kinetičke energije rotacije oko centra krivine.

U ovom radu se ne razmatraju viši izvodi radijus vektora r, ali se može konstatovati da i oni zavise od istih veličina od kojih zavise niži izvodi.

Uočimo da je za potpuno definisanje izvoda radijus vektora r i ugaone brzine ω_p potrebno i dovoljno poznavati tri parametra i to: krivinu k i torziju t hodografa radijus vektora r kao i modul $V = |\dot{r}|$ njegovog apsolutnog izvoda po vremenu. Ekvivalentan izbor parametara je: radijus krivine r, odnos torzije i krivine $c_{tk} = t / k$ i komponenta w_b ugaone brzine ω_p u pravcu binormale prirodnog triedra hodografa radijus vektora r. Ako telo ne rotira u odnosu na prirodni triedar (npr. u stacionarnim manevrima) onda je ugaona brzina prirodnog triedra istovremeno i ugaona brzina tela. Za jednoznačno određivanje položaja tela u prirodnom triedaru potrebna su još najmanje dva ugla, tako da je za jednoznačno određivanje položaja tela u prostoru tokom kretanja po proizvoljnoj putanji potrebno pet veličina merljivih u pokretnom koordinatnom sistemu čvrsto vezanom za telo.

Prethodni rezultati mogu se koristiti na više načina.

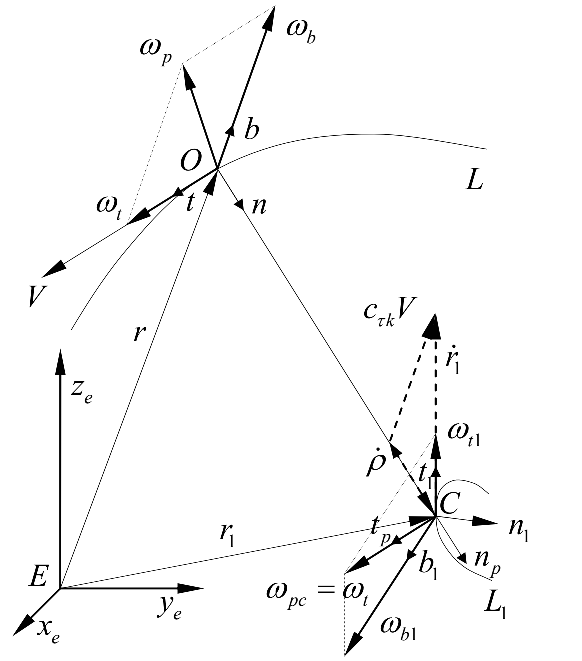
Prva namena je odredjivanje nominalnih kinematičkih veličina krutog tela za kretanje njegovog centra mase po putanji koja je unapred zadata. Tada su poznate veličina krivina k i torzija τ. Parametar V ili ω_b su definisani upotrebnom anvelopom tela. Upotrebna anvelopa se definiše na bazi mogućeg generisanja spoljnjeg opterećenja tela i dozvoljenog unutrašnjeg naprezanja. Primera radi kod robota i letelica spoljnje opterećenje je ograničeno, a njihovo ubrzanje ne sme biti veće od propisane vrednost.

Druga namena je stabilizacija kretanja na putanji. Naime, prethodne relacije pretpostavljaju da nema rotacije tela u odnosu na putanju, pa su položaji vektora brzina i ubrzanja u pirodnom triedru eksplicitno definisani. U skučaju postojanja rotacije tela u odnosu na putanju postojaće razlika položaja tih vektora u odnosu na očekivan položaj. Svodjenje tih razlika na nulu je stabilizacija kretanja.

Treća namena je prevodjenja kretanja sa jedne putanje na drugu namernim proizvođenjem priraštaja položaja vektora ugaone brzine i ubrzanja.

3. ZAKLJUČAK

U radu su primenom teorije vektora u diferencijalnoj geometriji nadjene relacije između parametra putanje centra mase i linearnih i ugaonih brzina i ubrzanja krutog tela izraženih pomoću koordinata prirodnog triedra za slučaj nepromenljive orijentacija tela u odnosu na orijentaciju prirodnog triedra. Pokazano je da je za jednoznačno definisanje brzina i ubrzanja tela potrebno tri parametra, a pet parametara za definisanje njegovog položaja.



Sl. 2. *Rotacija prirodnog triedara evolvente*

4. LITERATURA

[1] T. P. Anđelić, *Teorija vektora*, Prosveta, Beograd, 1947.
[2] G. Korn, T. Korn, *Mathematical Handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill Book Company, 1968.
[3] D. Rašković, *Dinamika*, Naučna knjiga, Beogrd, 1956

Abstract – The work is concerned with the task of establishing relationships between parameters of the trajectory tracked by the object mass center and quantities describing solid body kinematics in space, whereby it is assumed that the coordinate frame is fixed to the object and not rotate with respect to the natural trihedron of the trajectorty.

SOLID BODY KINEMATICS EXPRESSED IN THE NATURAL TRIHEDRON COORDINATES

M. D. Živanović, M. M. Živanović