SUSYQM TRANSFORMACIJA VOĐENIH VODOVA U POLUPROVODNIČKIM TALASOVODIMA

S. Kočinac, *Tehnološko-metalurški fakultet u Beogradu*

Sadržaj – *Brižljiv dizajn talasovoda je od suštinskog značaja za efikasan rad poluprovodničkih kvantnih kaskadnih lasera u srednjoj i dalekoj (teraherc) infracrvenoj oblasti. Tipičan talasovod se sastoji od više tankih slojeva sa prigodno odabranim dopiranjem koji definišu indeks prelamanja, što omogućava postojanje vezanih modova u strukturi. Osnovni cilj pri dizajniranju jedne takve strukture je minimizacija gubitaka i maksimizacija modalnog preklapanja sa aktivnom oblašću u kojoj se odvija pojačanje laserskog zračenja. U ovom radu ćemo pokazati kako se korišćenjem analogije izmedju Šredingerove i Helmholcove jednačine kao i primenom supersimetrične kvantne mehanike proširene na kompleksni domen, indeks prelamanja može varirati radi dobijanja optimalne strukture talasovoda u prethodno navedenom smislu.*

1. UVOD

Aktivna oblast kvantnih kaskadnih lasera (QCL-quantum cascade laser) se sastoji od kaskade jediničnih ćelija od kojih svaka sadrži odredjeni broj kvantnih jama/barijera koje se moraju pažljivo analizirati i dizajnirati [1], [2], posebno u teraherc oblasti (daleka infracrvena oblast). Jedan od glavnih problema pri ostvarivanju laserovanja u teraherc oblasti predstavlja činjenica da slobodni elektroni u materijalu indukuju velike unutrašnje optičke gubitke. Pored toga, još jednu bitnu prepreku predstavlja veličina optičkog moda koja je direktna posledica emisione talasne dužine. Pri manjim talasnim dužinama, recimo u bliskoj infracrvenoj oblasti, relativno veliko ograničenje optičkog moda na aktivnu oblast se može postići konvencionalnim dielektričnim talasovodima, kao što je slučaj u bipolarnim poluprovodničkim laserima, gde se ovo postiže korišćenjem materijala sa različitim indeksima prelamanja.

Uopšteno gledano, kvalitet QCL talasovoda se približno može proceniti iz odnosa gubitaka moda prilikom prostiranja kroz strukturu i modalnog faktora preklapanja β/Γ, pod uslovom da su gubici na ogledalima znatno manji nego gubici u talasovodu. Naš je cilj da ovako definisan faktor kvaliteta minimiziramo i radi postizanja ovoga koristićemo supersimetričnu kvantnu mehaniku (SUSYQM-supersymmetric quantum mechanics).

U delu koji sledi najpre dajemo kratak pregled osnovnih jednačina SUSYQM za kretanje elektrona u jednodimenzionalnom realnom potencijalu. Zatim, korišćenjem analogije izmedju Šredingerove i Helmholcove jednačine, proširujemo ovu ideju na kompleksni domen da bismo dobili čitavu familiju prostornih zavisnosti indeksa prelamanja od kojih samo jedna vodi do optimalnog ograničavanja moda na aktivnu oblast. Nalaženje ove konkretne zavisnosti je naš osnovni cilj.

2. SUSYQM MANIPULACIJA POTENCIJALA

Za unapred zadati potencijal $U(z)$ jednodimanzionalna Šredingerova jednačina u aproksimaciji konstantne mase je data izrazom:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2\psi_i}{dz^2}+U(z)\psi_i=E_i\psi_i,\quad i=1,2,\dots,k,\dots,n, \tag{1}$$

iz koje se dobija skup sopstvenih energija E_i i sopstvenih talasnih funkcija ψ_i. Varijacija potencijala putem SUSYQM omogućava da se manipuliše stanjima kvantnog sistema ubacivanjem i/ili brisanjem stanja k, pri čemu ostala stanja ostaju nepromenjena [3]. Dalje se novi potencijal može varirati izospektralno, tj. dobijeni energetski spektar se očuvava.

Familija novih, supersimetričnih, potencijala koji imaju energetski spektar identičan polaznom potencijalu je data sa:

$$U_{SS}(z)=U(z)-\frac{\hbar^2}{m^*}\frac{d^2}{dz^2}\ln[\chi+I(z)], \tag{2}$$

i

$$I(z)=\int_{-\infty}^{z}\psi_k^2(z^{'})dz^{'}, \tag{3}$$

gde je ψ_k talasna funkcija k-tog (SUSYQM manipulisanog) stanja potencijala $U(z)$. Variranjem slobodnog parametra χ je moguće dobiti čitavu familiju supersimetričnih izospektralnih potencijala. Konačni izrazi za supersimetrične talasne funkcije su definisani izrazima:

$$\psi_i^{SS}(z)=-\psi_i(z)\frac{\psi_k(z)}{\chi+I(z)}\int_{-\infty}^{z}\psi_i(z^{'})\psi_k(z^{'})dz^{'},\quad i\neq k \tag{4}$$

i

$$\psi_k^{SS}(z)=\sqrt{\chi(\chi+1)}\frac{\psi_k(z)}{\chi+I(z)}. \tag{5}$$

3. OPTIMIZACIJA TALASOVODA

U ovom delu ćemo ispitati mogućnost optimizacije talasovoda kako bismo minimizirali odnos konstantni gubici/faktor ograničenja. Ograničavajući faktor u optimizaciji predstavlja činjenica da parametri strukture i materijala moraju ostati u tehnološki dozvoljenim granicama.

Osnovna veličina koja karakteriše jedan sloj unutar višeslojne strukture je kompleksna permitivnost sloja, odnosno $\varepsilon = \varepsilon_R + i\,\varepsilon_I$, ili indeks prelamanja $n_c = n - i\,k$, gde je $n_c^2 = \varepsilon$. Rešenje Maksvelove jednačine, za svaki sloj konstantnog indeksa prelamanja unutar talasovoda, se može napisati kao proizvod ravanskog talasa koji se prostire u z-pravcu sa konstantom propagacije β i modulacione funkcije $\Phi_y(x)$, pri čemu $\Phi_y(x)$ zadovoljava redukovanu talasnu jednačinu (z- koordinate predstavlja pravac prostiranja, dok je x- osa normalna na slojeve i predstavlja sner narastanja strukture):

$$\frac{d^2\Phi_y(x)}{dx^2} + (k_0^2 n_c^2 - \beta^2)\Phi_y(x) = 0, \tag{6}$$

pri čemu $\Phi_y(x)$ označava $H_y(x)$ ($E_y(x)$) za TM (TE) polarizovano zračenje. Talasni broj slobodnog prostora je $k_0 = 2\pi/\lambda$, gde je λ talasna dužina lasera. QCL ima TM polarizaciju, te jednačina (6) postaje [4]:

$$n_c^2(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n_c^2(x)}\frac{dH_y(x)}{dx}\right] + k_0^2 n_c^2(x) H_y(x) = \beta^2 H_y(x). \tag{7}$$

Jednačina (7) u mnogome nalikuje Šredingerovoj jednačini sa kompleksnim potencijalom, s time što je sada β kompleksna sopstvena vrednost, a $H_y(x)$ kompleksna sopstvena funkcija jednačine (7). U [5] je prikazan supersimetrični metod za generisanje familije kompleksnih potencijala. Ovaj skup potencijala zavisi od dva slobodna parametra i nema singulariteta osim za odredjene diskretne vrednosti dvaju parametara. Odgovarajuće talasne funkcije su kvadratno integrabilne za sve vrednosti slobodnih parametara koje daju potencijale bez singulariteta.

Očigledna analogija izmedju jednačina (1) i (6) nam omogućava direktnu primenu supersimetrične transformacije za slučaj TE polarisanog zračenja. Medjutim, za TM polarisano zračenje je neophodno zapisati jednačinu (7) u obliku koji će nam omogućiti primenu SUSYQM, te nastavljamo na sledeći način.

Uvodimo novu funkciju $u(x)$ putem smene $H_y(x) = u(x)n_c(x) = u(x)\sqrt{\varepsilon(x)}$, te jednačina (7) postaje:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \varepsilon_{ef}(x)u(x) = \beta^2 u(x), \tag{8}$$

gde je

$$\varepsilon_{ef}(x) = \frac{1}{2\varepsilon(x)}\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2} - \frac{3}{4\varepsilon^2(x)}\left(\frac{d\varepsilon(x)}{dx}\right)^2 + k_0^2\varepsilon(x). \tag{9}$$

Posle svodjenja jednačine(8) na oblik sličan jednačini (1), primenjujemo SUSYQM na sledeći način kako bismo dobili familiju prostornih zavisnosti permitivnosti: za zadatu početnu zavisnost $\varepsilon(x)$ (koja je ekvivalentna početnom potencijalu u Šredingerovoj jednačini), iz jed. (8) računamo sopstvene vrednosti β i sopstvene talasne funkcije $u_i(x)$. Supersimetrični partner $\varepsilon_{SUSY}(x)$ početnom $\varepsilon_{ef}(x)$ je:

$$\varepsilon_{SUSY}(x) = \varepsilon_{ef}(x) + 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left[\chi + I(x)\right], \tag{10}$$

gde je χ novouvedeni slobodni parametar, a $I(x)$ je dato kao:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{x} |u_o(x')|^2 dx', \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_o(x')|^2 dx' = 1. \tag{11}$$

Odgovarajuća sopstvena talasna funkcija je definisana izrazom:

$$u_y^{SUSY}(x,\chi) = C \cdot \frac{u_o(x)}{\chi + I(x)}. \tag{12}$$

Slobodni parametar χ u jednačinama (10) i (12) ne sme uzimati vrednosti iz intervala [0,1] kako $\varepsilon_{SUSY}(x)$ ne bi posedovalo singularitete.

Kriterijum optimizacije je minimizacija faktora kvaliteta koji smo ranije definisali kao odnos modalnih propagacionih gubitaka i modalnog faktora preklapanja β/Γ, gde je Γ:

$$\Gamma(\chi) = \frac{\int_{\text{AO}} |H_y^{SUSY}(x',\chi)|^2 dx'}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_y^{SUSY}(x',\chi)|^2 dx'}. \tag{13}$$

AO označava da se integracija vrši samo unutar aktivne oblasti.

Veličina od suštinskog značaja pri optimizaciji talasovoda je slobodni parametar χ čijom se promenom menja $H_y(x)$, a samim tim i $H_y^{SUSY}(x)$, dok skup sopstvenih vrednosti β ostaje nepromenjen. Preostaje nam, dakle, da pretražimo ciljnu funkciju $\beta/\Gamma(\chi)$ u prostoru slobodnog parametra χ i uočimo zavisnost koja nam daje optimalnu zavisnost permitivnosti (indeksa prelamanja) $\varepsilon_{SUSY}(x,\chi_{\text{opt}}) = \varepsilon_S(x)$. Ipak, konačni kritetijum koji odlučuje da li je optimizovana zavisnost indeksa prelamanja prihvatljiva je mogućnost njegove praktične realizacije, odnosno, parametri strukture i materijala diktitrani zavisnošću $\varepsilon_S(x)$ moraju ostati u granicama tehnološke izvodljivosti. Konkretno, rezultujući profil $\varepsilon_S(x)$, koji će se unekoliko razlikovati od početne $\varepsilon_S(x)$ zavisnosti, mora biti moguće realizovati finim podešavanjem indeksa prelamanja putem podesnog dopiranja odredjenog sloja.

Pretpostavimo sada da smo odredili optimalni profil $\varepsilon_S(x)$. Ono za čime tragamo je realna zavisnost $\varepsilon_N(x)$ tako da važi:

$$\frac{1}{2\varepsilon_N(x)}\frac{d^2\varepsilon_N(x)}{dx^2} - \frac{3}{4\varepsilon_N^2(x)}\left(\frac{d\varepsilon_N(x)}{dx}\right)^2 + k_0^2\varepsilon(x) = \varepsilon_S(x). \tag{14}$$

Uvodjenjem nove veličine $\varepsilon_N(x) = 1/v^2(x)$, jednačina (14) se svodi na

$$-v\frac{d^2v(x)}{dx^2} + k_0^2 - \varepsilon_S(x)v^2(x) = 0, \tag{15}$$

a posle još jedne smene $v(x) = k_0 w$, dobijamo sledeću nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$-w(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \varepsilon_S(x)w^2(x) + 1 = 0. \tag{16}$$

Rešenje jednačine (16) daje realni profil permitivnosti:

$$\varepsilon_N(x) = \frac{1}{k_0^2 w^2(x)}. \tag{17}$$

Prema našem saznanju, jednačina (16) je analitički nerešiva, pa se problemu mora pristupiti numerički.

4. ZAKLJUČAK

U radu je predložen metod za dizajn QCL talasovoda zasnovan na SUSY kvantnoj mehanici. Na osnovu duboke analogije izmedju Šredingerove i Helmholcove talasne jednačine data je procedura za optimizaciju TM moda. Za TE modove, koji se ne javljaju u QCL, optimizaciona procedura je vrlo jednostavna i može se primeniti direktno. U sledećem radu ćemo primeniti ovde izloženu metodu za konkretnu optimizaciju talasovoda QCL-a koji radi na talasnoj dužini od 70 μm [6], [7].

LITERATURA

[1] S. Kočinac, S. Tomić, V. Milanović, Z. Ikonić, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 2357 (2002)

[2] D. Indjin, S. Tomić, Z. Ikonić, P. Harrison, R. W. Kelsall, V. Milanović, S. Kočinac, Appl. Phys. Lett. **81**, 2163 (2002)

[3] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. **251** 267 (1995)

[4] J. Stiens, R. Vounckx, I. Veretennicoff, A. Voronko, G. Shkerdin, J. Appl. Phys. **81** 1 (1997)

[5] V. Milanović, Z. Ikonić, Phys. Lett. A **293**, 29 (2002)

[6] D. Indjin, Z. Ikonić, P. Harrison, R. W. Kelsall, J. Appl. Phys. **199** 3249 (2003)

[7] D. Indjin, privatna komunikacija

Abstract - Properly designed waveguides are of great importance for efficient operation of mid-infrared and terahertz quantum cascade semiconductor laser. Such waveguides comprise layers with suitably chosen doping, which determines refractive index, which enables bound modes to exist. It is of great interest to tailor the structure so to get minimal losses and maximal modal overlap with the active (gain) layer. In this paper we use the analogy between the Schrödinger and Helmholtz equations, and employ supersymmetric quantum mechanics, extended into the complex domain, in order to vary refractive index profile in search for better waveguide design.

SUSY TRANSFORMATION OF GUIDED MODES IN SEMICONDUCTOR WAVEGUIDES

S. Kočinac