

MODELOVANJE JEDNAČINE TRANSPORTA TOPLOTE U BIOLOŠKIM TKIVIMA

Milena Davidović¹, Radovan Gospavić¹, Dragana Nikolić²,

1. Gradjevinski fakultet, Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

2. Faculty of Electrical Engineering, University of Portsmouth, UK

Abstrakt - Problemi transporta toplote u biomaterijalima zahtevaju određivanje vremenske i prostorne raspodele temperature. Uobičajeni pristup ovoj klasi problema je rešavanje Pennes-ove jednačine provođenja toplote u biomaterijalima. U radu će biti prikazan način rešavanja ove jednačine korišćenjem matematičke analogije između termalnog i električnog modela.

1. UVOD

Modelovanje transporta toplote u biološkim tkivima [1-7] je od velikog značaja prilikom procenjivanja da li se laserske hirurške metode, koje se do sada ograničavaju na homogena tkiva kao što je jetra, u budućnosti mogu primeniti i na nehomogena. Posebno je izazovno modelovanje oblasti u blizini velikih krvnih sudova. Na osnovu raspodele temperature moguće je predvideti oštećenje tkiva što predstavlja osnovu za kasnije planiranje laserskih hirurških metoda različitih tkiva.

2. JEDNAČINA TRANSPORTA TOPLOTE U BIOLOŠKIM TKIVIMA

Svrha ozračivanja tkiva laserskom energijom je stvaranje toplote u ozračenom tkivu. Dovedena toplota se ili akumulira ili odvodi, što dovodi do promena u lokalnoj temperaturi. Pennes-ove jednačine provođenja toplote uzima u obzir sposobnost tkiva da odvodi toplotu kako pasivnom kondukcijom (difuzijom) tako i putem krvi. Većina tkiva kao na primer veći deo kože i mozak su dobro prokrvljeni, sa koeficijentom perfusije koji ćemo označiti sa ω , koji se izražava u jedinicama $1ml/g\ min$. Alternativno umesto ω možemo koristiti maseni protok povezan sa perfusijom ω_m sa jedinicom $kg\ m^{-3}\ s^{-1}$. Pennes-ove jednačine glasi

$$\rho c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) - c_k \omega_m(T) \rho_k (T - T_a) + Q_m + P(z, t) \quad (1)$$

gde su ρ , c_i , k gustina, specifična toplota i termalna provodnost tkiva respektivno, c_k je specifična toplota krvi, ρ_k gustina krvi, T temperatura lokalnog tkiva, T_a referentna temperatura (arterijske krvi), t je vreme, Q_m je količina toplote po jedinici zapremine, koju proizvodi metabolizam, $P(z, t)$ je toplota, koja se deponuje po zapremini usled prostorno raspoređenog zagrevanja. U ovom generalnom slučaju ω_m zavisi od temperature, jer se zbog termoregulacije menja protok krvi prilikom dovođenja toplote tkivu, obično sa određenim vremenskim kašnjenjem.

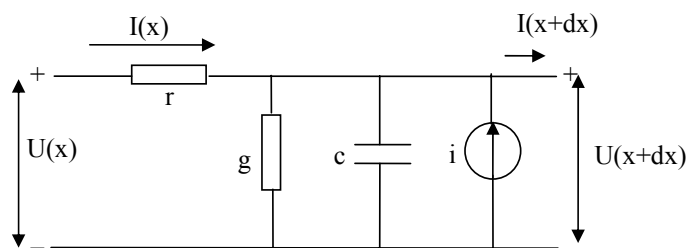
3. EKVIVALENTNA ELEKTRIČNA ŠEMA JEDNAČINE TRANSPORTA TOPLOTE U BIOLOŠKIM TKIVIMA

Tražimo električki ekvivalent jednačine transporta toplote u slučaju kada temperatura zavisi samo od jedne koordinate kada jednačina (1) postaje

$$\rho c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - c_k \omega_m(T) \rho_k (T - T_a) + Q_m + P(x, t) \cdot$$

(2)

Posmatrajmo kolo sa slike 1.



Slika 1. Ekvivalentna električna šema tkiva debljine dx na rastojanju x od koordinatnog početka

Važe jednačine

$$U(x) - U(x + dx) = r I(x), \quad (3)$$

$$I(x) - I(x + dx) = g U(x + dx) + c \frac{\partial U}{\partial t} - i. \quad (4)$$

Deljenjem jednačina (3) i (4) sa dx uz oznake $r' = r/dx$, $g' = g/dx$, $c' = c/dx$, $i' = i/dx$, ako uzmemo da $dx \rightarrow 0$ dobijamo

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = r' I, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = c' \frac{\partial U}{\partial t} + g' U - i'. \quad (6)$$

Diferenciranjem jednačine (5) po koordinati, pomoću (6) dobijamo,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r'} \frac{\partial U}{\partial x} = -c' \frac{\partial U}{\partial t} - g' U + i' \quad (7)$$

odakle pregrupisavanjem članova imamo

$$c' \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r'} \frac{\partial U}{\partial x} - g' U + i' \quad (8)$$

što je ekvivalentno jednačini (2) gde temperaturi u jednačini (2) odgovara napon iz (8) sa parametrima kola

$$c \rightarrow \rho c_i dx, \quad (9)$$

$$r \rightarrow \frac{1}{k} dx, \quad (10)$$

$$g \rightarrow C_k \rho_k \omega_m dx, \quad (11)$$

$$i \rightarrow (Q_m + P(x,t)) dx. \quad (12)$$

Primenimo opisanu proceduru da bismo opisali transport toplote kroz kožu koju ćemo opisati karakteristikama njena tri sloja epidermisa, dermisa i subkutanog vezivnog tkiva. Epidermis je tanak spoljašnji sloj kože ($80 \mu m$) koji čini njen epitel. Dermis je deblji sloj ($2000 \mu m$) koji sadrži mnogo kapilara koji obezbeđuju hranu i kiseonik. Subkutano vezivo ($18000 \mu m$) je sloj masnog tkiva koga prožimaju elastična vlakna čija je uloga da povežu dermis sa organima ispod njega (naprimer mišićima). Termalne osobine ova tri sloja kože date su u tabeli [7].

Epidermis		
k_e	termalna provodnost	$0.23 W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ρ_e	gustina	$1200 kg m^{-3}$
c_e	specifična toplota	$3590 J kg^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ω_e	brzina perfuzije	$0 kg m^{-3} s^{-1}$
Dermis		
k_d	termalna provodnost	$0.45 W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ρ_d	gustina	$1200 kg m^{-3}$
c_d	specifična toplota	$3300 J kg^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ω_d	brzina perfuzije	$1.25 \cdot 10^{-3} kg m^{-3} s^{-1}$
Subkutano tkivo		
k_s	termalna provodnost	$0.19 W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ρ_s	gustina	$1000 kg m^{-3}$
c_s	specifična toplota	$2675 J kg^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ω_s	brzina perfuzije	$1.25 \cdot 10^{-3} kg m^{-3} s^{-1}$
Krv		
c_k	specifična toplota	$3770 J kg^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
ρ_k	gustina	$1060 kg m^{-3}$

Na osnovu podataka iz table i jednačina (9)-(11), pošto odaberemo veličinu podele dx za svaki od slojeva kože, možemo odrediti parametre električnog kola. Rad dobijenog električnog kola je simuliran u programskom paketu SPICE.

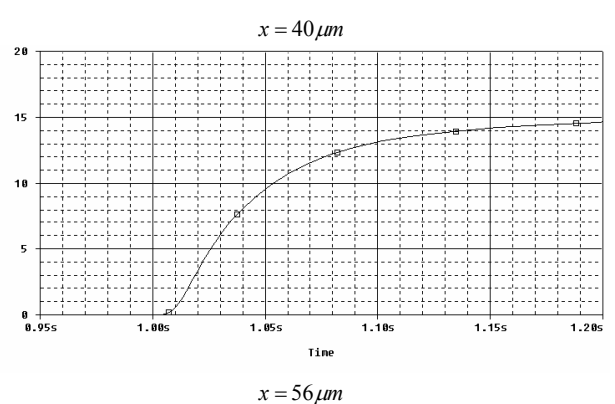
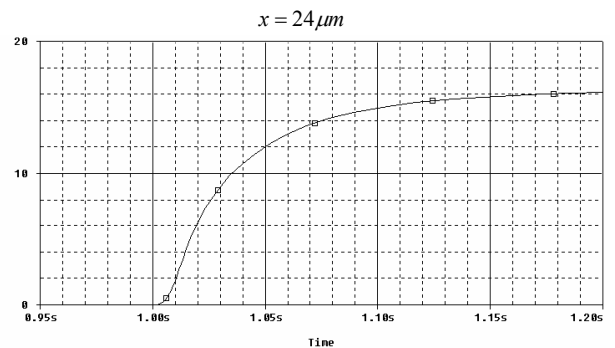
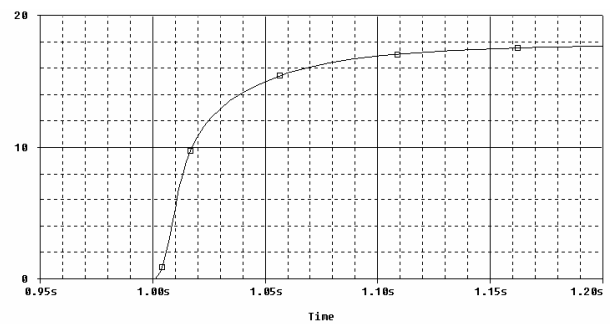
Simuliran je skok temperature od $20^\circ C$ na površini epidermisa u trenutku $t=1s$. Na slikama 2-4, prikazane su

vremenske zavisnosti temperature na različitim dubinama u epidermisu, dermisu i subkutanom tkivu.

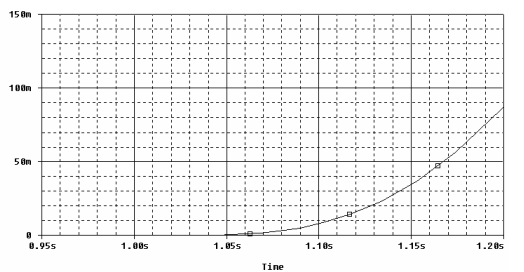
Temperatura epidermisa brzo prati površinske promene temperature, tako se na dubini $x = 56 \mu m$ već za 0.2s dostiže temperaturna promena od $15^\circ C$, odnosno 75% površinske promene temperature.

Temperatura dermisa za isto vreme od 0.2s, na dubini $x = 680 \mu m$ promeni se oko $0,1^\circ C$, a na dubini $x = 1480 \mu m$ samo $5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ C$. Da bi se na dubini $x = 680 \mu m$ dostigla temperatura od $19^\circ C$, potrebno je da prođe oko 100s.

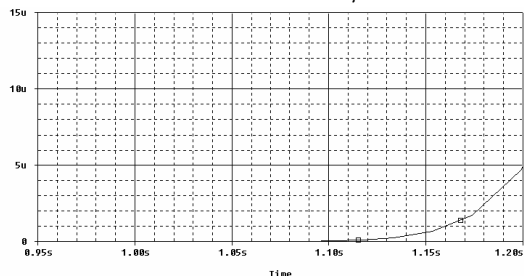
Promene temperature u subkutanom tkivu još su sporije. Za vreme od 100s na dubini $x = 7480 \mu m$ temperatura se promeni za $1,6^\circ C$ a na dubini $x = 14680 \mu m$ za $10^{-2} \text{ } ^\circ C$.



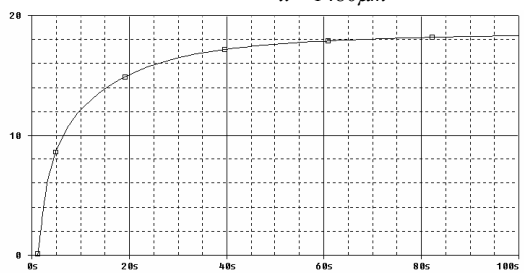
Slika 2. Vremenska zavisnost temperature epidermisa



$x = 680\mu\text{m}$

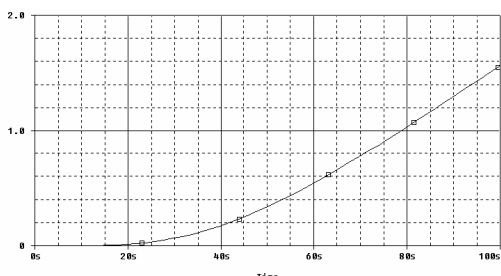


$x = 1480\mu\text{m}$

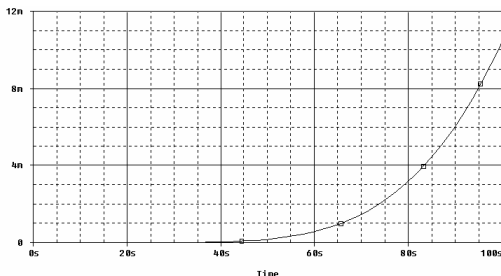


$x = 680\mu\text{m}$

Slika 3. Vremenska zavisnost temperature dermisa



$x = 7480\mu\text{m}$



$x = 14680\mu\text{m}$

Slika 4. Vremenska zavisnost temperature subkutanog tkiva

4. ZAKLJUČAK

U radu je posmatrana jednodimenziona jednačine transporta toplote u biološkim tkivima. Nađen je njen električki ekvivalent, odnosno električno kolo za čije potencijale čvorova važi ista jednačina kao za temperaturu tkiva.

U programskom paketu SPICE je na osnovu termičkih karakteristika različitih slojeva kože, simuliran odziv na skokovitu površinsku promenu temperature.

LITERATURA

- [1] Z-S. Deng, J. Liu "Monte Carlo method to solve multidimensional bioheat transfer problem", *Numerical Heat Transfer Part B*, 2002, vol. 42, no. 6, pp. 543-567(25)
- [2] S. Karea, J. Zhang, F. Yang "A Numerical Study of a 3D Bioheat Transfer Problem with Different Spatial Heating"
- [3] M. Jasinski, A. Pavnuik "Modelling of heat transfer in biological tissue by interval FEM"
- [4] R. Davalos, B. Rubinsky, L. Mir "Theoretical analysis of the thermal effects during in vivo tissue electroporation" www.elsevier.com
- [5] C. Yeung, E. Atalar "A Green's function approach to local rf heating in interventional MRI" *Med.Phys.* 28(5), May 2001, pp 826-832
- [6] Y. Mohammed, J. F. Verhey , "A finite element method model to simulate laser interstitial thermo therapy in anatomical inhomogeneous regions", *Biomedical Engineering Online*, 2005 January 4
- [7] T. R. Gowrishankar, D. A. Stewart, G. T. Martin, J. C Weaver, "Transport lattice models of heat transport in skin with spatially heterogeneous, temperature-dependant perfusion" *Biomedical Engineering Online*, 2004, 17 November

Abstract - Bioheat transfer problems require determination of temporal and spatial distribution of temperature. Common approach to this class of problems is solving of the Pennes bioheat equation, which describes conduction of heat in biomaterials. In this paper, the Pennes equation will be solved by using the mathematical analogy between thermal and electrical model.

MODELING OF BIOHEAT TRANSPORT EQUATION

Davidović Milena, Gospavić Radovan, Arsoski Vladimir,
Dragana Nikolić