

PROCENA AMPLITUDSKOG OPSEGA SKALARNOG KVANTIZERA ZA REJLIJEV IZVOR

Zoran Perić, Jelena R. Nikolić, *Elektronski fakultet u Nišu*
Danijela R. Aleksić, *Telekom Srbija*

Sadržaj – Cilj ovog rada je određivanje amplitudskog opsega optimalnog skalarnog kvantizera sa konstantnom bitskom brzinom za signale sa dvostranom Rejljevom raspodelom. Kao kriterijum za određivanje amplitudskog opsega korišćena je ukupna distorzija koja predstavlja sumu granularne i overload distorzije. Od velikog značaja je pokazati kako amplitudski opseg zavisi od broja kvantizacionih nivoa. U radu je predložen aproksimativni metod koji veoma brzo i jednostavno omogućava procenu amplitudskog opsega skalarnog kvantizera, tako da je on idealno opterećen.

1. UVOD

Opseg kvantizera je ključno sporno pitanje u realizaciji kvantizera. Kada je kvantizer pravilno projektovan, tj. kada je prilagođen amplitudskoj dinamici ulaznog signala, greška usled preopterećenja je zanemarljivo mala u odnosu na grešku kvantovanja. Lloyd-Max-ovi algoritmi [1], [2] za projektovanje optimalnih kvantizera počinju sa procenom amplitudskog opsega, tako da što je bolja procena brže je konvergencija algoritama. Problem se javlja pri određivanju amplitudskog opsega kvantizera kada su na ulazu kvantizera signali sa funkcijama gustine verovatnoće (pdf) različitim od one za koje je izvršena njegova optimizacija. U ovom radu predložićemo jedan veoma jednostavan aproksimativni metod pronalaženja amplitudskog opsega optimalnog skalarnog kvantizera za ulazne signale koji predstavljaju Rejljeve slučajne promenljive sa beskonačnim amplitudskim opsegom. Nakon projektovanja optimalnog kvantizera i procene amplitudskog opsega primenom predloženog aproksimativnog metoda sračunaćemo vrednost granularne, overload i ukupne distorzije.

2. OPTIMIZALNI SKALARNI KVANTIZER

Posmatramo optimalni skalarni kvantizer sa konstantnom bitskom brzinom R . Signali na ulazu kvantizera su slučajne promenljive sa dvostranom Rejljevom raspodelom. Neka je kvantizer sa N nivoa $Q^{(N)}$ definisan skupom od N kvantizacionih intervala $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ i skupom od N udaljenosti reprezentacionog nivoa od donjeg praga odluke $\{\delta_i\}_{i=1}^N$. Neka su $\{t_i^{(N)}\}_{i=0}^N$ $N+1$ granica odluke kvantizera takve da važi:

$$t_0^{(N)} = -\infty < t_1^{(N)} < \dots < t_{N-1}^{(N)} < t_N^{(N)} = \infty. \quad (1)$$

Amplitudski kvanti su definisani sa:

$$S_i^{(N)} = (t_{i-1}^{(N)}, t_i^{(N)}], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Amplitudski kvanti $S_2^{(N)}, \dots, S_{N-1}^{(N)}$ se nazivaju unutrašnjim kvantima, a $S_1^{(N)}$ i $S_N^{(N)}$ spoljašnjim kvantima.

Neka su N vrednosti na izlazu kvantizera (vrednosti reprezenata) $\{y_i\}_{i=1}^N$ date sa:

$$y_i = t_{i-1}^{(N)} + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

Svakom amplitudskom kvantu $S_i^{(N)}$ jednoznačno odgovara nivo kvantovanja y_i . Dakle, skalarni kvantizer sa N nivoa karakteriše sledeća funkcionalna povezanost ulaznog signala i reprezenata na izlazu:

$$Q^{(N)}(x) = y_i, \quad t_{i-1}^{(N)} < x \leq t_i^{(N)} \quad (4)$$

Optimalan N -nivoiski kvantizer, označićemo sa $Q^{*(N)}$, za izvor koji se karakteriše kao kontinualna slučajna promenljiva X sa gustinom verovatnoće $p(x)$, je kvantizer koji minimizira srednje-kvadratnu grešku:

$$D(Q^{(N)}) = E\{(X - Q^{(N)}(X))^2\} \quad (5)$$

$$D(Q^{(N)}) = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^{(N)}}^{t_i^{(N)}} (x - y_i)^2 p(x) dx \quad (6)$$

Dakle, da bi kvantizer bio optimalan potrebno i dovoljno je da ne postoji neki drugi skalarni kvantizer sa N nivoa koji može ostvariti manju distorziju. Neka je distorzija optimalnog N -nivoiskog skalarnog kvantizera:

$$D^{*(N)} = D(Q^{*(N)}) \quad (7)$$

Panter i Dite [3] su prvi utvrdili da je za veliko N :

$$D^{*(N)} \cong c_\infty / N^2 \quad (8)$$

gde je c_∞ Panter-Dite-ova konstanta:

$$c_\infty = \frac{\Delta}{12} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p^{1/3}(x) dx \right)^3 \quad (9)$$

3. PROCENA AMPLITUDSKOG OPSEGA

Problem određivanja maksimalne amplitude tj. granularne oblasti je veoma značajan i razmatran je u [4] i [5]. Amplitudski opseg kvantizera tj. granularna oblast je interval gde su greške kvantovanja male, ili se barem nalaze u određenim granicama. Slično, greške su velike, ili barem prevazilaze određene granice, u oblasti koja je komplementarna amplitudskom opsegu kvantizera, a koja se obično naziva oblast prekoračenja. Naredne relacije opisuju simetrični kvantizer čiji je amplitudski opseg neuniformno, ali simetrično, podeljen na kvantizacione intervale. Pošto je celokupni opseg podeljen na amplitudski opseg kvantizera, tj. granularnu oblast i njen komplement tj. oblast prekoračenja, tada i ukupna distorzija može da se podeli na granularnu distorziju D_{gran} i distorziju prekoračenja, tj. overload distorziju D_{ol} :

$$D = D_{gran} + D_{ol} \quad (10)$$

Procena opsega kvantizera je korisna pri određivanju osnovnih granica u Panter-Ditovoj formuli (8):

$$D_{gran} = \frac{1}{12N^2} \left(\int_{-x_{max}}^{x_{max}} p^{1/3}(x) dx \right)^3 \quad (11)$$

Razmatraćemo Rejljev izvor bez memorije. Funkcija gustine verovatnoće (pdf) nulte srednje vrednosti i varijanse σ^2 za dvostranu Rejljevu slučajnu promenljivu je data sa:

$$p(x) = \frac{|x|}{\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{\sigma^2}} \quad (12)$$

Bez gubitaka na opštosti možemo pretpostaviti da je $\sigma^2 = 1$ pa se izraz (12) svodi na :

$$p(x) = |x|e^{-|x|^2} \quad (13)$$

Zamenom (13) u (11) izraz za granularnu distorziju se svodi na:

$$D_{gran} = \frac{3}{4N^2} \Gamma^3 \left(\frac{2}{3} \right) P^3 \left(\frac{x_{max}^2}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad (14)$$

gde je $P \left(\frac{x_{max}^2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ nepotpuna Gama funkcija koja je u opštem slučaju oblika:

$$P(x, a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \quad (15)$$

D_{ol} se definiše na sledeći način:

$$D_{ol} = 2 \int_{x_{max}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx \quad (16)$$

pri čemu je iskorišćena simetrija Rejljeve raspodele. Zamenom (13) u (16) izraz za overload distorziju se svodi na:

$$D_{ol} = 1 - P(x_{max}^2, 2) + y_N^2 e^{-x_{max}^2} - y_N \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - P \left(x_{max}^2, \frac{3}{2} \right) \right) \quad (17)$$

Razmatraćemo kvantizer sa $N-2$ kvantizaciona intervala i granicom t_{N-1} .

$$D_{gran}(N-2, t_{N-1}) \approx \frac{1}{12(N-2)^2} \left(\int_{-t_{N-1}}^{t_{N-1}} p^{1/3}(x) dx \right)^3 \quad (18)$$

$$D_{ol} = 2 \int_{t_{N-1}}^{\infty} (x - y_{N-1})^2 p(x) dx \quad (19)$$

$$D = D_{gran} + D_{ol} \quad (20)$$

$$D_{gran} = \frac{c(t_{N-1})}{(N-2)^2} \approx \frac{c(t_{N-1})}{N^2} \quad (21)$$

gde je:

$$c(t_{N-1}) = \frac{1}{12} \left(\int_{-t_{N-1}}^{t_{N-1}} p^{1/3}(x) dx \right)^3 \quad (22)$$

$$c(t_{N-1}) = c_{\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt[3]{12c_{\infty}}} \int_{t_{N-1}}^{\infty} p^{1/3}(x) dx \right)^3 \quad (23)$$

Za veliko t_{N-1} , korišćenjem $(1 - \varepsilon)^3 \approx 1 - 3\varepsilon$ za $\varepsilon \ll 1$, izraz (23) se svodi na:

$$c(t_{N-1}) = c_{\infty} \left(1 - \frac{6}{\sqrt[3]{12c_{\infty}}} \int_{t_{N-1}}^{\infty} p^{1/3}(x) dx \right) \quad (24)$$

Koristićemo metod minimizacije distorzije tj. diferenciraćemo izraz (20) i na taj način naći optimalnu vrednost t_{N-1} za koju je izvod jednak nuli:

$$\frac{\partial D}{\partial t_{N-1}} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{N^2} \left(\frac{3c_{\infty}}{2} \right)^{2/3} t_{N-1}^{1/3} e^{-t_{N-1}^2/3} - (t_{N-1} - y_{N-1})^2 t_{N-1} e^{-t_{N-1}^2} = 0 \quad (26)$$

Posmatrajmo sada kvantizer sa N nivoa. y_N predstavlja reprezent u N -tom kvantizacionom intervalu i može se predstaviti kao centroid finkcije gustine verovatnoće u odgovarajućem intervalu:

$$y_N = \frac{\int_{t_{N-1}}^{\infty} xp(x) dx}{\int_{t_{N-1}}^{\infty} p(x) dx} \quad (27)$$

$$y_N = t_{N-1} + \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - P \left(t_{N-1}^2, \frac{1}{2} \right) \right) e^{t_{N-1}^2} \quad (28)$$

Udaljenosti granice t_{N-1} od reprezentata y_{N-1} i y_N su jednake, stoga dobijamo izraz za y_{N-1} :

$$y_{N-1} = t_{N-1} - \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - P \left(t_{N-1}^2, \frac{1}{2} \right) \right) e^{t_{N-1}^2} \quad (29)$$

Zamenom (29) u (26) dobija se:

$$t_{N-1}^2 = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3^{2/3} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right)} \right) - \frac{3}{2} \ln N - \frac{1}{2} \ln t_{N-1} - \frac{3}{2} \ln \left(1 - P \left(t_{N-1}^2, \frac{1}{2} \right) \right) \quad (30)$$

Iterativnim rešavanjem poslednje jednačine, pri čemu se za startnu vrednost u iterativnom procesu uzima vrednost $t_{N-1}=3$ [5], nakon samo dve iteracije dobijamo optimalnu vrednost za

t_{N-1} . Kada je broj kvantizacionih intervala veliki [1] važi sledeća jednakost:

$$g'(x) \approx \frac{2t_{N-1}}{(N-2)\Delta_{N-1}} \quad (31)$$

gde je:

$$g(x) = \frac{\int_0^x p^{1/3}(x) dx}{\int_0^{t_{N-1}} p^{1/3}(x) dx} \quad (32)$$

kompresorska funkcija, tj. njen izvod je:

$$g'(x) = \frac{p^{1/3}(x)}{\int_0^{t_{N-1}} p^{1/3}(x) dx} \quad (33)$$

Sa Δ_{N-1} označena je širina $N-1$ -vog kvantizacionog intervala, tj. sa $\Delta_{N-1}^{(0)}$ i $\Delta_{N-1}^{(1)}$ početna i krajnja vrednost širine $N-1$ -vog kvantizacionog intervala respektivno:

$$\Delta_{N-1}^{(0)} = \frac{2t_{N-1}}{(N-2)c'(y_{N-1})} \quad (34)$$

Nakon određivanja t_{N-1} i y_{N-1} moguće je sračunati odgovarajuće vrednosti $\Delta_{N-1}^{(0)}$ i $\Delta_{N-1}^{(1)}$. U slučaju optimalnog skalarnog kvantizera, sa velikim brojem kvantizacionih intervala može se smatrati da je:

$$\Delta_{N-1}^{(1)} = \frac{2t_{N-1}}{(N-2)c'\left(t_{N-1} - \frac{\Delta_{N-1}^{(0)}}{2}\right)} \quad (35)$$

Nećemo učiniti veliku grešku ako pretpostavimo da je širina $N-1$ -vog kvantizacionog intervala jednaka širini N -tog kvantizacionog intervala:

$$\Delta_N \approx \Delta_{N-1} \quad (36)$$

Optimalan amplitudski opseg, tj. vrednost x_{max} određuje se iz:

$$x_{max} = t_{N-1} + \Delta_N \quad (37)$$

Izbor ovako definisanog amplitudnog opsega je dobro rešenje za veći opseg bitskih brzina, tj. broja kvantizacionih nivoa, a za ulazne signale kvantizera sa dvostranom Rejljevom raspodelom.

4. NUMERIČKI REZULTATI

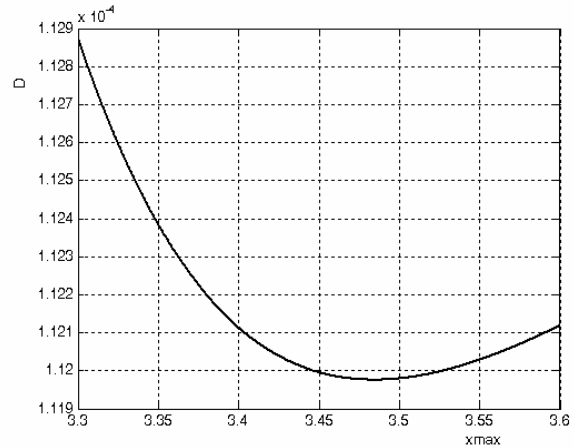
U cilju postizanja približno tačnih rešenja, na znatno jednostavan način predlažemo aproksimativan metod određivanja amplitudskog opsega kvantizera za ulazne signale koji predstavljaju Rejljeve slučajne promenljive sa beskonačnim amplitudskim opsegom. U Tabeli 1. date su numeričke vrednosti donje granice N -tog kvantizacionog intervala t_{N-1} i optimalnog amplitudskog opsega signala na

N	t_{N-1}	x_{max}
128	2.9778	3.4681
256	3.2756	3.7346
512	3.6035	4.0479
1024	3.8376	4.2514

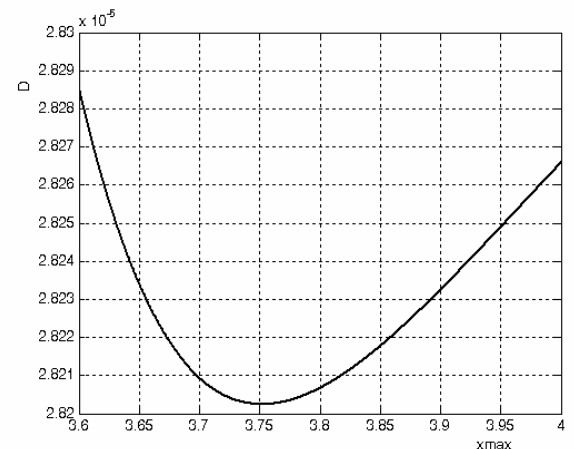
Tabela 1. Numeričke vrednosti za t_{N-1} i x_{max} za različite vrednosti broja kvantizacionih nivoa N

N	D_{gran}	D_{ol}	D
128	$1.1099 \cdot 10^{-4}$	$9.8851 \cdot 10^{-7}$	$1.1198 \cdot 10^{-4}$
256	$2.8076 \cdot 10^{-5}$	$1.2679 \cdot 10^{-7}$	$2.8203 \cdot 10^{-5}$
512	$7.0678 \cdot 10^{-6}$	$1.0009 \cdot 10^{-8}$	$7.0778 \cdot 10^{-6}$
1024	$1.7710 \cdot 10^{-6}$	$1.6384 \cdot 10^{-9}$	$1.7726 \cdot 10^{-6}$

Tabela 2. Numeričke vrednosti za D_{gran} , D_{ol} i D za različite vrednosti broja kvantizacionih nivoa N

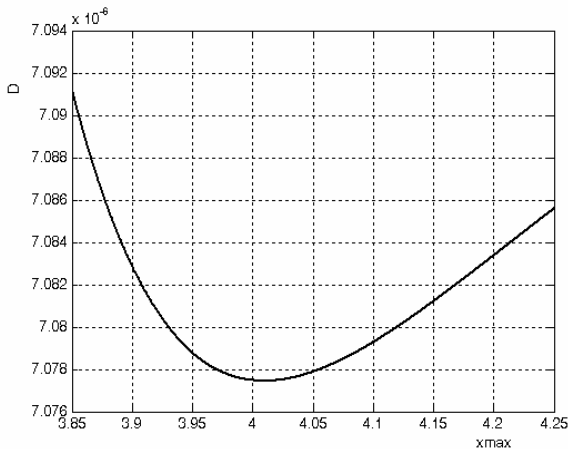


Slika 1. Zavisnost distorzije od amplitudskog opsega neuniformnog skalarnog kvantizera sa $N=128$ kvantizacionih nivoa

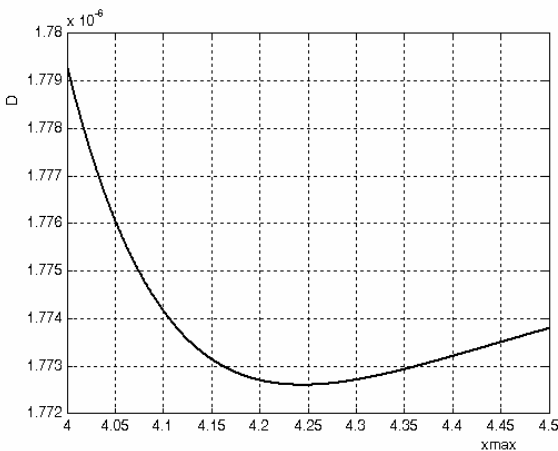


Slika 2. Zavisnost distorzije od amplitudskog opsega neuniformnog skalarnog kvantizera sa $N=256$ kvantizacionih nivoa

ulazu kvantizera, tako da je on idealno opterećen, računate primenom predloženog metoda minimizacije distorzije kada je broj kvantizacionih nivoa $N=128$, $N=256$, $N=512$ i $N=1024$. Grafici zavisnosti ukupne distorzije od amplitudskog opsega neuniformnog skalarnog kvantizera, za $N=128$, $N=256$, $N=512$ i $N=1024$ prikazani su na Slici 1., Slici 2., Slici 3. i Slici 4. respektivno. Sa navedenih grafika može se očitati x_{maxopt} koje odgovara minimumu distorzije odnosno odgovara sračunatim vrednostima za x_{max} prikazanim u Tabeli 1. U Tabeli 2. prikazane su numeričke vrednosti za D_{gran} , D_{ol} i D sračunate korišćenjem izraza (14), (17) i (20), kada je broj kvantizacionih nivoa $N=128$, $N=256$ i $N=512$ i $N=1024$, koje takođe odgovaraju minimumu distorzije očitanoj na prikazanim graficima.



Slika 3. Zavisnost distorzije od amplitudskog opsega neuniformnog skalarnog kvantitiera sa $N=512$ kvantizacionih nivoa



Slika 4. Zavisnost distorzije od amplitudskog opsega neuniformnog skalarnog kvantitiera sa $N=1024$ kvantizacionih nivoa

5.ZAKLJUČAK

Na osnovu logike prezentovane u radu moguće je jednostavno određivanje amplitudskog opsega optimalnog skalarnog kvantizera za ulazne signale koji predstavljaju dvostranu Rejljevju slučajnu promenljivu sa beskonačnim amplitudskim opsegom. U radu je data zavisnosti maksimalne amplitude signala na ulazu kvantizera od broja kvantizacionih nivoa, sračunata je vrednost ukupne distorzije. Aproksimativnim metodom određivanje amplitudskog opsega optimalnog skalarnog kvantizera na brz i jednostavan način dobijamo vrednosti maksimalne amplitude tako da je kvantizer idealno opterećen. Izbor ovako definisanog amplitudnog opsega je dobro rešenje za veći opseg bitskih brzina, tj. broja kvantizacionih nivoa. Predloženi metod je mnogo jednostavniji od poznatog Maks-Lojzdovog iterativnog postupka optimalne kvantizacije [1], [2].

LITERATURA

- [1] N.S. Jayant, Peter Noll, *Digital coding of waveforms*
- [2] J. Max, "Quantizing for minimum distortion", IRE, Trans. Inform. Theory, vol. IT-6, pp. 7-12, Mar. 1960
- [3] P.F. Panter and W. Dite, "Quantization distortion in pulse count modulation with nonuniform spacing of levels", Proc. IRE, pp.44-48, Jan 1951
- [4] Sangsin Na, "On the Support of Fixed-Rate Minimum Mean-Squared Error Scalar Quantizers for Laplacian Source", IEEE Transactions on information theory, vol. 47, No. 7, November 2001.
- [5] Sangsin Na and David L. Neuhoff, "On the Support of MSE-Optimal, Fixed-Rate, Scalar Quantizers", IEEE Transactions on information theory, vol. 47, No. 7, November 2001.

Abstract – The goal of this paper is finding amplitude range for optimal scalar quantizer with constant bit rate and two-sided Rayleigh distributed input signals. As main criteria is used total distortion, which can be found as sum of granular and overload distortion. It is very important to show how amplitude range depend on the number of quantization levels. The approximation's method for determining amplitude range is suggested. This method can be used for simply and fast estimation of amplitude range for scalar quantizer, as a result quantizer is ideally loaded.

ESTIMATION OF AMPLITUDE RANGE FOR RAYLEIGH SOURCE'S SCALAR QUANTIZERS

Zoran Perić, Jelena R. Nikolić, Danijela R. Aleksić