

IZRAČUNAVANJE PAKETSKE GREŠKE U PRISUSTVU KOMPOZITNOG FEDINGA

Ivo M. Kostić

Elektrotehnički fakultet, Podgorica

Sadržaj- U ovom radu dobijen je eksplicitni analitički izraz za srednju verovatnoću paketske greške za klasu binarnih modulacija (FSK, GMSK) u prisustvu vrlo sporog Nakagamijevog fedinga, shadowing-a i aditivnog Gausovog šuma. Analizirana verovatnoća je $P(N,M)$, gde je N dužina paketa, a M je broj pogrešno primljenih bita. Ovaj rezultat relevantan je: za analizu kvaliteta prenosa u aktuelnim bežičnim sistemima koji koriste paketski prenos, za ocenu kvaliteta prenosa blok korekcionih kodova kao i za analizu protoka u ARQ sistemima.

1. UVOD

Aktuelni mobilni sistem GSM/GPRS i *ad-hoc* sistemi (IEEE802.11b i Bluetooth) baziraju na prenosu blokova (ili paketa) bita. Pri takvoj organizaciji prenosa poruka poznavanje srednje verovatnoće greške po bitu nije dovoljna mera za ocenu kvaliteta prenosa, jer značaj uticaja pogrešno primljenog bita zavisi od mesta na kom se greška dogodila. U poslednje vreme ovaj problem predmet je intezivnih razmatranja, pre svega, u kontekstu analiza vezanih za koegzistenciju *ad-hoc* sistema (videti, napr., [1]-[3]).

Početna istraživanja ocene kvaliteta paketskog prenosa u radio-kanalima datiraju skraj 70-ih godina prošlog veka i motivisana su specifičnim potrebama HF sistema [4]- [6], i potrebama vezanim za razvoj sistema ALOHA [7]. U to vreme, sobzirom na kompleksnost problema i stanje razvoja analitičkih metoda za opis slučajnih fluktuacija obvojnice prijemnog radio-signal, analiza performansi paketskog prenosa koncentrisana je na model kanala koji uključuje Rejlijev feding. Kasnije analiza je proširena na kanal sa Nakagamijevim fedingom [8], a potom i na kanal sa Rajsovim fedingom [9]. Zbog vrlo složenih analitičkih problema vezanih za opis sporog fediga (*shadowing*), koliko je poznato, ne postoji eksplicitni analitički tretman uticaja brzog i sporog fedinga (u daljem tekstu – kompozitni feding) na pojavu paketa grešaka. S druge strane, u aktuelnim radio-kanalima u kojima se odvija paketski prenos prisutan je kompozitni feding, pa postoji realna potreba da se egzakto razluči doprinos i utvrdi specifični karakter uticaja brzog i sporog fedinga na srednju verovatnoću paketske greške. Rezultati vezani za eksplicitni statistički aparat za opis kompozitnog fedinga omogućavaju da se analiza paketskih grešaka prozrokovanih kompozitnim fedingom i aditivnim sumom izvrsi u eksplicitnoj analitičkoj formi (za pregled tih rezultata konsultovati, napr., [10]). Sjedne strane, takav rezultat relaksira napore za dugotrajno i nepregledno simulaciono rešavanje problema analize paketa grešaka, a sa druge strane dalje afirmiše potencijal pomenutog statističkog aparata za opis kompozitnog fedinga. Analitički rezultat za srednju verovatnoću paketske greške biće dat u funkciji parametara kompozitnog fedinga, parametara modulacionog formata i parametara koji definišu strukturu paketa. Pre

svega, takav rezultat koristan je za specifične analize paketskih *ad-hoc* sistema, koristan je prilikom dizajniranja protokola, a direktno je primenjiv i za analizu rezidualne greške prilikom primene FEC (*Forward Error Correction*) kao i za analizu protoka u ARQ (*Automatic Retransmission reQuest*) sistemima.

2. ANALIZA

Za *indoor ad-hoc* sisteme tipična je slaba mobilnost, tj. feding je vrlo spor i to ne samo od jednog do drugog signalizacionog intervala nego je koeficijent korelacije obvojnice jednak 1 na intervalu dužine koji obuhvata blok(ove) bita. To znači da će u periodima dubokog fedinga postojati uslovi da se formiraju paketi grešaka. Taj fenomen je dobro poznat i u principu mogao bi se prevazići ranomizacijom grešaka, tj., primenom *interleaving*-a. Međutim, pri opisanom scenariju, kašnjenje usled *interliving*a bilo bi nedopustivo veliko (posebno za govorne i kontrolne blokove). Stoga, ostaje da se problem rešava kombinacijom FEC i ARQ. U svakom slučaju, pri datim uslovima u kanalu, treba izračunati srednju verovatnoću $P(N,M)$, gde je N dužina paketa, a M je broj pogrešno primljenih bita u paketu.

Ovde su od interesa FSK i GMSK modulacioni formati. Verovatnoća greške u prisustvu aditivnog Gausovog šuma, tj., statička verovatnoća greške po bitu za navedene modulacije može se zapisati u obliku

$$P(\rho) = a \exp(-b\rho), \quad (1)$$

gde je ρ trenutni odnos signal-šum, a parametri (a , b) zavise od modulacionog formata (NCFSK: $a=b=0.5$; GMSK: za dati demodulator a i b se određuju eksperimentalno, napr., [3] $a=0.1$, $b=0.092$).

Imajući u vidu navedene uslove dalje se bavimo izračunavanjem srednje verovatnoće greške da se u paketu koji sadrži N bita nađe više od M pogrešno primljenih bita, pa je odgovarajuća statička verovatnoća

$$P_s(N, M) = \sum_{i=M+1}^N \binom{N}{i} P^i(\rho) [1-P(\rho)]^{N-i} \quad (1)$$

gde je $P(\rho)$ verovatnoća definisana u (1). Primenom binomne formule izraz (1) možemo zapisati kao

$$P_s(N, M) = \sum_{i=M+1}^N \binom{N}{i} P^i(\rho) \sum_{j=0}^{N-i} \binom{N-i}{j} (-1)^j P^j(\rho) \quad (3)$$

Pod pretpostavkom da je feding spor u odnosu na trajanje bloka od N bita, bezuslovna verovatnoća pojave više od M pogrešno primljenih bita u bloku od N bita je

$$P(N, M) = \int_0^{\infty} P_s(N, M | \rho) f(\rho) d\rho \quad (4)$$

gde je $f(\rho)$ funkcija gustine verovatnoće trenutnog odnosa signal-šum u prisustvu kompozitnog fedinga, tj., [10]

$$f(\rho) = \frac{2}{\Gamma(m)\Gamma(m_s)} \left(\frac{mm_s}{\rho_0} \right)^{\frac{m+m_s}{2}} \rho^{\frac{m+m_s-2}{2}} \cdot K_{m_s-m} \left(2\sqrt{\frac{mm_s}{\rho_0}} \rho \right). \quad (5)$$

gde je $K_\nu(\cdot)$ Beselova funkcija druge vrste ν -tog reda, $\Gamma(\cdot)$ je gama funkcija. Značenje pojedinih parametara u izrazu (5) je: ρ_0 je srednji odnos signal-šum; m je parametar Nakagamijevog fedinga ($0.5 \leq m < \infty$); m_s je parametar koji karakteriše spori feding ($0.5 \leq m_s < \infty$), a u relaciji je sa standardnom karakteristikom *shadowing-a*, σ_{dB} , tj.

$$m_s = 1/(\exp((\sigma_{dB}/8.686)^2) - 1), \quad \sigma_{dB} < 9dB \quad (6)$$

Na osnovu (3) i (4) je

$$P(N, M) = \sum_{i=M+1}^N \binom{N}{i} \sum_{j=0}^{N-i} \binom{N-i}{j} (-1)^j \cdot J(k=i+j) \quad (7)$$

gde je

$$J(k \triangleq i+j) \triangleq \int_0^\infty P^{i+j}(\rho) f(\rho) d\rho \quad (8)$$

Sada se problem svodi na izračunavanje integrala $J(k)$. Taj postupak je veoma obiman, pa ćemo zbog ograničenosti raspoloživog prostora navesti samo osnovne korake na putu do rešenja: 1. smena $2\sqrt{mm_s\rho/\rho_0} \triangleq x$; 2. sukcesivna primena formula [11, (2.16.8.4)], [12, (9.220.4)] i [12, (9.220.2)]. Konačni rezultat je

$$J(k) = a^k \left(\frac{mm_s}{bk\rho_0} \right)^{m_s} \frac{\Gamma(m-m_s)}{\Gamma(m)} \cdot {}_1F_1 \left(m_s; m_s - m + 1; \frac{mm_s}{bk\rho_0} \right) + a^k \left(\frac{mm_s}{bk\rho_0} \right)^m \frac{\Gamma(m_s - m)}{\Gamma(m_s)} \cdot {}_1F_1 \left(m; m - m_s + 1; \frac{mm_s}{bk\rho_0} \right) \quad (9)$$

gde je ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ konfluentna hipergeometrijska funkcija. Zbog analitičke preglednosti pogodno je u izrazu (7) u sumi po j izdvojiti član za koji je $j=0$, pa je

$$P(N, M) = \sum_{i=M+1}^N \binom{N}{i} \cdot J(k=i) + \sum_{j=1}^{N-i} \binom{N-i}{j} (-1)^j \cdot J(k=i+j) \quad (10)$$

Proverimo korektnost izraza (10). Uradićemo to na dva načina. Prvo, ako je $N=1$ i $M=0$ izraz (10) treba da predstavlja srednju verovatnoću greške u prisustvu kompozitnog fedinga. U ovom slučaju prva suma u (10) ima samo jedan član, a druga suma je jednaka nuli, pa je

$$P(1, 0) = J(k=1) \quad (11)$$

Konsultujući komentar uz izraz (14) u referenci [10] nalazimo da je, kao što i treba da bude, $J(k=1) \equiv P_f$, gde je P_f

srednja verovatnoća greške po bitu računata na bazi (1). Drugo, asimptotskom analizom izraza (9) u odsustvu *shadowing-a*, tj. kada $m_s \rightarrow \infty$, može se pokazati da je

$$J(k) = a^k \frac{m^m}{\rho_0^m \left(\frac{m}{\rho_0} + kb \right)^m}, \quad \text{pri } m_s \rightarrow \infty \quad (12)$$

Smenom (12) u (10) dobijamo izraz sa srednju verovatnoću paketske greške u prisustvu Nakagamijevog fediga. Ovaj rezultat može se direktno uporediti sa rezultatom iz [8] ili, za specijalni slučaj $m=1$, može se uporediti sa rezultatima [4] - [7], [13] (Napmena: u [4] je dato numeričko rešenje u prisustvu Rejljevog fedinga, u [5] je dato analitičko rešenje kada je koeficijent amplitudskih fluktuacija Rejljevog fedinga jednak 1 na nivou bloka, a u [6] i [13] dato je rešenje za bilo koju vrednost koeficijenta korelacije obvojnice Rejljevog fedinga). Dalje, pri $N=1$, $M=0$ i $m=1$ za NCFSK ($a=b=0.5$) lako je utvrditi da je $P(1,0)=J(k=1)=1/(2+\rho_0)$, tj., prema očekivanju dobijen je dobro poznati rezultat za srednju verovatnoću greške po bitu NCFSK signala u prisustvu sporog Rejljevog fedinga.

Prema tome, eksplicitni izraz (10), posmatran u odnosu na raspoložive rezultate za verovatnoću paketa grešaka, opšti je jer se odnosi Nakagamijev feding ($0.5 < m < \infty$) i na *shadowing* ($0.5 < m_s < \infty$, tj. $\sigma_{dB} < 9dB$).

Koristeći rezultat definisan izrazom (10) mogu se neposredno proširiti analize [1]-[3] sa Rejljevog na generalizovani kompozitni feding. Takođe, rezultat (10) direktno je primenljiv za analizu (n,k) blok FEC koji koriguju do t pogresno primljenih bita (veza oznaka koje se koriste u ovom radu i oznaka vezanih za FEC je: $N \triangleq n$, $M \triangleq t$). Za analize u ARQ sistemima koji rade u prisustvu kompozitnog fedinga neophodna je verovatnoća $P(N,0)$.

Ako je $mm_s/bk\rho_0 \ll 1$ tada ${}_1F_1(\cdot; \cdot; mm_s/bk\rho_0) \rightarrow 1$, pa se izraz (9) bitno pojednostavljuje. Ovo pojednostavljenje treba imati u vidu kada se izračunava $P(N,M)$ pri $N \gg 1$.

Striktno posmatrano, prethodna analiza i rezultat (10) nije primenljiv na sisteme koji koriste DPSK modulacioni format ($a=0.5$, $b=1$). Naime, zbog diferencijalne detekcije dolazi do poznate pojave udvajanja grešaka, pa to utiče na modifikaciju paketske greške. Ta okolnost nije uključena u napred sprovedenu analizu. U principu, modifikacija je moguća koristeći metodologiju datu u [9] (videti i specifičnu referencu vezanu za pomenuti problem, a na koju se poziva [9]).

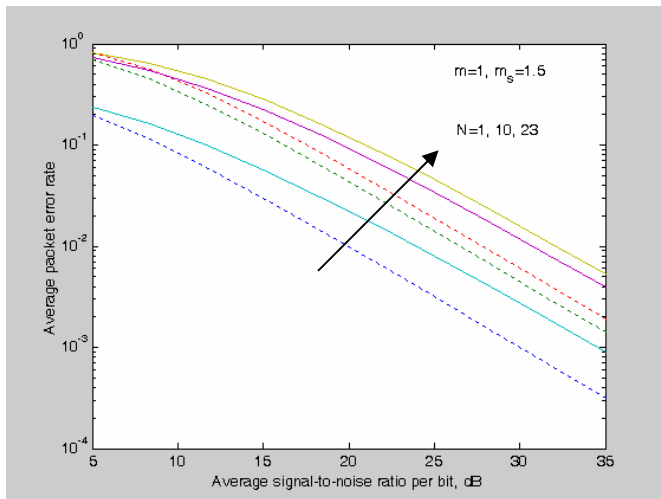
Korisno je zapisati i srednju verovatnoću paketske greške u prisustvu interlivinga, $P_i(N, M)$. U tom slučaju, greške na različitim bitskim pozicijama su nezavisne, pa je

$$P_i(N, M) = \sum_{i=M+1}^N \binom{N}{i} P_f^i (1-P_f)^{N-i} \quad (13)$$

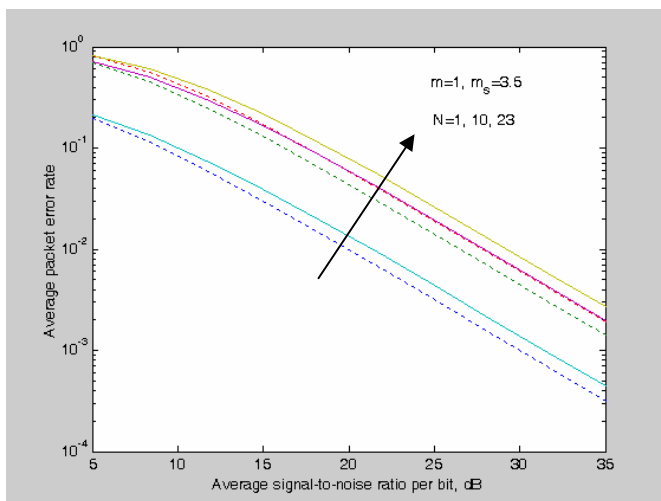
gde je P_f srednja verovatnoća greške po bitu u prisustvu kompozitnog fedinga. U našem slučaju je $P_f \equiv J(k=1)$.

Ako je $P_f < 10^{-2}$ aproksimativno je

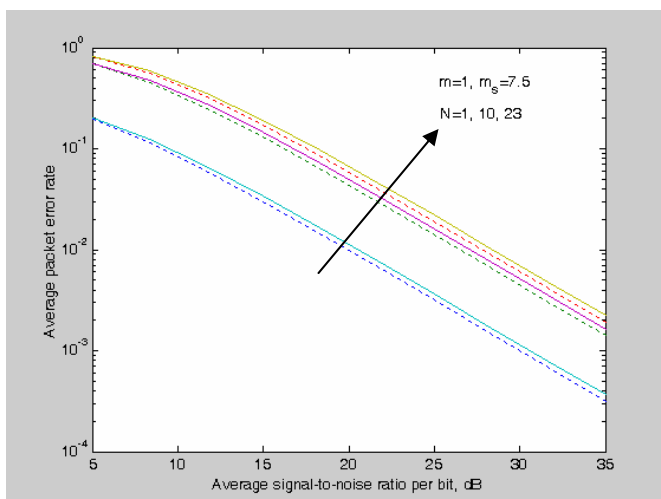
$$P_i(N, M) \approx \binom{N}{M+1} P_f^{M+1} \quad (14)$$



(a)



(b)



(c)

Slika 1. Srednja verovatnoća paketske greške $P(N,0)$ za NCFSK pri Rejljevom fedingu ($m=1$) i za različite intenzitete *shadowing*-a: (a) $m_s=1.5$, (b) $m_s=3.5$, (c) $m_s=7.5$.

----- prisutan samo feding

— prisutan feding i *shadowing*

Lako je analitički pokazati, ili jednostavno numerički proveriti, da je $P_i(N, M) \ll P(N, M)$. To znači da visoka korelacija amplitudskih fluktuacija fedinga vrlo nepovoljno utiče na kvalitet prenosa blokova bita. Rezultati (13) i (14) direktno su primenljivi i u slučaju FFH (bez interlivinga) ako je brzina skakanja jednaka $1/T$, gde je T signalizacioni interval.

3. GRAFIČKI REZULTATI I ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Verovatnoća $P(N,0)$ ima posebni praktični značaj. Na Slici 1(a), (b) i (c) uporedo su date dve familije krivih $P(N,0)$ za NCFSK, a odnose se na kanal sa kompozitnim fedingom (pune linije) i na kanal samo sa fedingom (isprekidane linije). Obe familije odnose se na tri vrednosti dužine paketa ($N=1, 10, 23$). Na svim slikama je $m=1$ (Rejljev feding) dok je intenzitet *shadowing*-a na Slici 1(a) $m_s=1.5$ ($\sigma_{dB}=6.2dB$), na Slici 1(b) $m_s=3.5$ ($\sigma_{dB}=4.35dB$), a na Slici 1(c) $m_s=7.5$ ($\sigma_{dB}=3.0dB$). Krive $P(1,0) \equiv P_f$ su referentne za sagledavanje kvalitativnog i kvantitativnog uticaja dužine paketa na $P(N,0)$. Krive prikazane isprekidanim linijama su referentne za sagledavanje kvalitativnog i kvantitativnog uticaja *shadowing*-a na $P(N,0)$. Pošto se različite slike odnose na različite intenzitete *shadowing*-a očigledan je njegov značajni uticaj na srednju verovatnoću paketske greške (videti relativni položaj istoimenih krivih crtanih punim linijama na različitim slikama). Ovo jasno ilustruje svrsishodnost analize izvršene u ovom radu.

LITERATURA

- [1] I. Howitt, V. Mitter, J. Guterrez, "Empirical study for IEEE802.11 and Bluetooth interoperability", *IEEE Fall VTC 2001*, Rhodes, 2001.
- [2] A. Zanella, A. Tonello, S. Pupolin, "On the impact of fading and inter-picknet interference on Bluetooth performance", *Proc. WPMC 2002*.
- [3] O. Andrisano, et. al., "Bluetooth and IEEE802.11 coexistence: Analytical performance evaluation in fading channel", *Proc. PRIMC 2002*.
- [4] R.E. Eaves, A. H. Levesque, "Probability of block error for very slow Rayleigh fading in Gaussian noise", *IEEE Trans. Comm.*, March, 1977., st. 368-374.
- [5] B. Maranda, C. Leung, "Block error performance of noncoherent FSK modulation on Rayleigh fading channels", *IEEE Trans. Comm.*, Feb., 1984., st. 206-209.
- [6] V. I. Korzik, L.M. Fink, *Pomehoustjčivoje kodirovanie diskretnyh soobščenii v kanalah so slučajnoj strukuroj*. Svjaz, Moskva, 1975.
- [7] J. Roberts, T. J. Healy, "Packet radio performance over slow Rayleigh fading channels", *IEEE Trans. Comm.*, No.2, 1980., st. 279-286.
- [8] Y. Dong, Le Ngoc, A. Shich, "Block error probabilities in a Nakagami fading channel", *Proc. VTC*, Seconces, 1993, st. 130-133.
- [9] J.A. Roberts, J. M. Bargallo, "DPSK Performance for indoor wireless Rician fading channels", *IEEE Trans. Comm.*, No.2/3/4, 1994., st. 592-596.

- [10] I. M. Kostic, "Statistički model mobilnog radio-kanala i njegova primena za analizu kvaliteta prenosa", *Konf. TELFOR*, Beograd, 2004.
- [11] A. P. Prudnikov, Ju. A. Bryckov, O. I. Maricev, *Integrali i rjady*, tom II. Nauka, Moskva, 1981.
- [12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 4th ed., (in Russian). Moscow: FM Publisher, 1962.
- [13] H. Bischl, E. Lutz, "Packet error rate in the non-interleaved Rayleigh channel", *IEEE Trans. Comm.*, No.2/3/4, 1995., st. 1375-1382.

Abstract – This paper provides exact analysis of the impact of very slow Nakagami- m fading, shadowing and additive Gaussian noise on the average block error-rate performance of NCFSK and GMSK systems. We present the closed form solution for probability $P(N,M)$, i.e., the probability of more than M errors in a block of N digits. The analysis is applicable in evaluating the performance of indoor ad-hoc systems. The probability $P(N,M)$ is also useful in evaluating the performance of an FEC code and for ARQ throughput analysis.

BLOCK ERROR EVALUATION IN FADING/SHADOWING CHANNEL

Ivo M. Kostić