

## UTICAJ PODUŽNE INDUKTIVNOSTI NA KARAKTERISTIKE VODA

Bratislav Milovanović<sup>1</sup>, Aleksandar Marinčić<sup>2</sup>, Nebojša Dončov<sup>1</sup>, Mladen Randelović<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Elektronski fakultet u Nišu, <sup>2</sup>Elektrotehnički fakultet u Beogradu

### Rad po pozivu

**Sadržaj** – U ovom radu je dat Heaviside-ov kriterijum za TEM dvožični vod koji obezbeđuje prostiranje signala duž voda bez disperzije. Uvođenjem odgovarajućeg faktora ispunjenosti Heaviside-ovog uslova razmatrano je ponašanje dvožičnog voda u funkciji promene podužne induktivnosti. Izvedene su granične vrednosti karakterističnih funkcija prostiranja na vodu i izvršena je analiza njihovog ponašanja u frekvencijskom domenu za različite vrednosti predloženog faktora.

### 1. UVOD

Efekat gubitaka na dvožičnom vodu dovodi do slabljenja i disperzije prostiranja signala duž voda. Usled disperzije različite frekvencije u spektru signala se prostiru različitim brzinama što dovodi do distorzije nesinusoidalnih talasnih oblika. Slabljenje i distorzija koji se javljaju usled prisustva gubitaka na dvožičnom vodu su predstavljali ozbiljan problem za prenos govora na velikim rastojanjima u ranim danima razvoja klasične (tj. fiksne) telefonije. Teorija električnih kola bazirana na Maxwell-ovim jednačinama, razvijena od strane Heaviside-a 1893. godine [1], stvorila je preduslove za rešavanje ovog problema. Do tada je dvožični vod opisivao preko difuzione jednačine koja, izraženo preko električnih kola, uvodi raspodeljenu rednu otpornu i paralelnu kapacitivnu mrežu.

Definišući induktivnost u rednoj grani i uzimajući u obzir njenu vrednost pri razmatranju dvožičnog voda, Heaviside je primetio da efekti slabljenja i distorzije na vodu opadaju sa porastom induktivnosti. Analizom zavisnosti konstante prostiranja od frekvencije (iz uslova minimalnih gubitaka na vodu) izveo je relaciju između primarnih parametara dvožičnog voda (tkz. Heaviside-ov uslov  $LG = RC$ ) pri kojoj slabljenje i brzina prostiranja na vodu ne zavise od frekvencije. Vodovi sa primarnim podužnim parametrima koji zadovoljavaju ovaj uslov imaju neograničen propusni opseg što znači da izlazni signal zadržava isti vremenski oblik pri prostiranju kao i ulazni signal priveden vodu; jedino je oslabljen i kasni u odnosu na njega.

Kako vodovi koji se koriste za telefonski saobraćaj generalno imaju malu podužnu induktivnost, odnosno  $LG \ll RC$ , naš naučnik Mihajlo Pupin je, vrlo brzo po objavljivanju Heaviside-ovih rezultata, predložio da se u cilju povećanja induktivnosti telefonski kablovi opterete sa periodično umetnutim kalemovima što je i 1900. godine eksperimentalno verifikovao na Columbia Univerzitetu u Sjedinjenim Američkim Državama [2,3]. Ova metoda poznata kao diskretno opterećivanje ili Pupinizacija se još uvek koristi na lokalnim i magistralnim telefonskim linijama (kablovima). Sve dok frekvencije na vodu nisu suviše blizu frekvencijama na kojima je talasna dužina  $\lambda$  istog reda veličine kao i rastojanje između umetnutih kalemoveva  $a$ , diskretno opterećivanje daje isti efekat kao i da je induktivnost kontinualno povećavana duž voda ( $\lambda \gg \pi a$ ) [4].

Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja čiji su rezultati publikovani u referencama [5,6] i prvi je u seriji radova koji se, od strane autora, planiraju u cilju rasvetljavanja ideje o pupinovim kalemovima. U ovom radu je razmatran uticaj promene podužne induktivnosti na karakteristike dvožičnog voda. U tu svrhu uveden je parametar - faktor ispunjenosti Heaviside-ovog uslova. Pored toga, izvedene su odgovarajuće vrednosti karakterističnih funkcija prostiranja na vodu za dve granične učestanosti,  $\omega \rightarrow 0$  i  $\omega \rightarrow \infty$ . Izvršena je analiza njihovog ponašanja u frekvencijskom domenu za različite vrednosti predloženog faktora i dati su odgovarajući zaključci.

### 2. PARAMETRI DVOŽIČNOG VODA SA GUBICIMA

Konstanta prostiranja realnog TEM dvožičnog voda sa gubicima se u funkciji primarnih podužnih parametara može izraziti na sledeći način [4]:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (1)$$

pri čemu:  $\alpha$  je konstanta slabljenja izražena u Np/m ili dB/m,  $\beta$  je fazna konstanta izražena u rad/m,  $R$ ,  $L$ ,  $G$  i  $C$  su primarni podužni parametri voda (otpornost, induktivnost, odvodnost i kapacitivnost po jedinici dužine voda respektivno) i  $\omega$  je kružna učestanost izražena u rad/s. Rešavanjem sistema od dve jednačine, dobijenim izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova leve i desne strane jednačine (1), po nepoznatima  $\alpha$  i  $\beta$  lako se dolazi do sledećih izraza:

$$\alpha^2(\omega) = \frac{RG - \omega^2 LC}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega^2 LC - RG}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega(LG + RC)}{2}\right)^2} \quad (2)$$

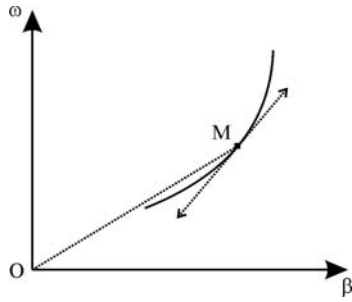
$$\beta^2(\omega) = \frac{\omega^2 LC - RG}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega^2 LC + RG}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega(LG - RC)}{2}\right)^2} \quad (3)$$

Kako konstanta slabljenja zavisi od frekvencije to znači da će različite komponente u spektru signala koji se prostire vodom biti različito oslabljene. Ovaj efekat, poznat pod nazivom amplitudska distorzija, obično se redukuje korišćenjem filtera propusnika opsega, vezanim na kraj voda, koji spektar signala dele na podopsege. Za svaki od podopsega koristi se drugačiji faktor pojačanja.

Budući da se u telekomunikacijama duž voda redovno prostire modulirani signal čiji spektar zauzima neki deo frekvencijskog opsega, razlikujemo faznu brzinu,  $v_p$ , kao brzinu prostiranja signala nosioca i grupnu brzinu,  $v_g$ , kao brzinu prostiranja anvelope modulisanog signala odnosno brzinu prostiranja energije duž voda:

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)}, v_g(\omega) = \frac{d\omega}{d\beta(\omega)} \quad (4)$$

Dijagram koji prikazuje krivu zavisnosti kružne učestanosti od fazne konstante (tkz. Brillouin dijagram) je veoma pogodan za određivanje fazne i grupne brzine.



Sl.1. Brillouin dijagram

U bilo kojoj tački M (Sl.1), fazna brzina je određena nagibom prave linije OM, dok je grupna brzina definisana tangentom na krivu u tački M. Kada ova kriva nije prava linija, fazna i grupna brzina se razlikuju međusobno i njihove vrednosti variraju sa promenom frekvencije. Pošto grupna brzina predstavlja brzinu kojom se različite frekvencijske komponente u spektru modulisanog signala prostiru, to znači da i njihovo vreme prostiranja duž voda nije isto. Iz tog razloga nemoguće je izvršiti rekonstrukciju frekvencijskog spektra signala na izlazu odnosno dolazi do tzv. fazne distorzije signala. Ovaj efekat poznat kao disperzija predstavlja veliki problem u telekomunikacijama i obično se eliminiše skupim linijama sa promenljivim kašnjenjem ubačenim duž voda. Po analogiji sa faznom i grupnom brzinom moguće je definisati fazno i grupno kašnjenje koji se za vod jedinične dužine mogu izraziti kao:

$$\tau_p(\omega) = \frac{1}{v_p(\omega)} = \frac{\beta(\omega)}{\omega}, \tau_g(\omega) = \frac{1}{v_g(\omega)} = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \quad (5)$$

Od mogućeg interesa za analizu su vrednosti faznog i grupnog kašnjenja za dve granične učestanosti,  $\omega \rightarrow 0$  i  $\omega \rightarrow \infty$ . Polazeći od proizvoda faznog i grupnog kašnjenja datog kao:

$$\tau_p(\omega)\tau_g(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{\omega} \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\omega} \frac{d\beta(\omega)^2}{d\omega} = \tau_{pg}(\omega) \quad (6)$$

i traženjem izvoda jednačine (3) po  $\omega$ , dobija se:

$$\tau_{pg}(\omega) = \frac{1}{4} \left( 2LC + \frac{2\omega^2 L^2 C^2 + L^2 C^2 + R^2 C^2}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \right) \quad (7)$$

Primenom Lopitalovog pravila uz korišćenje prethodne jednačine moguće je dobiti vrednost faznog kašnjenja za  $\omega \rightarrow 0$  na sledeći način:

$$\tau_p(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{d\beta^2/d\omega}{d\omega^2/\omega}}_{\omega \rightarrow 0} = \sqrt{\tau_{pg}(\omega)_{\omega \rightarrow 0}} \quad (8)$$

odnosno

$$\tau_p(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{(LG+RC)/2}{\sqrt{RG}} = \sqrt{LC} \frac{(LG+RC)/2}{\sqrt{RGLC}} \quad (9)$$

Primenjujući uslov da  $\omega \rightarrow 0$  na jednačinu (6) i koristeći jednačinu (8) može se pokazati da je grupno kašnjenje za  $\omega \rightarrow 0$  jednako faznom kašnjenju za  $\omega \rightarrow 0$  odnosno:

$$\tau_g(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{(LG+RC)/2}{\sqrt{RG}} = \sqrt{LC} \frac{(LG+RC)/2}{\sqrt{RGLC}} \quad (10)$$

Na sličan način se za drugu graničnu učestanost,  $\omega \rightarrow \infty$ , dobijaju sledeće vrednosti za fazno i grupno kašnjenje:

$$\tau_p(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = \tau_g(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = \sqrt{LC} \quad (11)$$

Vrednosti konstante prostiranja za dve granične učestanosti se lako određuju iz jednačine (3) i one su:

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{za } \omega \rightarrow 0 \\ \infty, & \text{za } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (12)$$

Kada je reč o konstanti slabljenja, njene granične vrednosti se mogu odrediti koristeći sledeću vezu sa konstantom prostiranja:

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega(LG+RC)}{2\beta(\omega)} = \frac{(LG+RC)/2}{\frac{\beta(\omega)}{\omega}} \quad (13)$$

Budući da izraz u imeniocu predstavlja fazno kašnjenje čije su vrednosti za ove dve granične učestanosti već određene jednačinama (9) i (11), to su vrednosti konstante slabljenja za  $\omega \rightarrow 0$  i  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} \sqrt{RG}, & \text{za } \omega \rightarrow 0 \\ \sqrt{RG} \frac{(LG+RC)/2}{\sqrt{RGLC}}, & \text{za } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14)$$

### 3. HEAVISIDE-OV USLOV

Uslov da su gubici na vodu minimalni dobija se iz izraza  $\frac{d\alpha^2}{dL} = 0$  koji uz korišćenje jednačine (2) poprima oblik [4]:

$$\sqrt{\left( \frac{G^2 + \omega^2 C^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)} \omega^2 L - \omega^2 C = 0 \quad (15)$$

Iz poslednje jednačine se dobija dobro poznati Heaviside-ov uslov  $LG=RC$ . Kada je ispunjen Heaviside-ov uslov, slabljenje duž voda je konstantno i nezavisno od frekvencije, dok fazna karakteristika linearno zavisi od frekvencije. Jednačine (2) i (3) poprimaju oblik:

$$\alpha(\omega) = \sqrt{RG} \quad (16)$$

$$\beta(\omega) = \omega\sqrt{LC} \quad (17)$$

Vod sa primarnim podužnim parametrima koji zadovoljavaju Heaviside-ov kriterijum unosi jednako fazno i grupno kašnjenje za sve komponente u spektru signala:

$$\tau_p(\omega) = \tau_g(\omega) = \sqrt{LC} \quad (18)$$

### 4. ISPUNJENJE HEAVISIDE-OVOG USLOVA

Za dvožični vod, primarnih podužnih parametara  $R, L, G$  i  $C$ , potrebna induktivnost za realizaciju Heaviside-ovog kriterijuma dobija se kao:

$$L_H = \frac{RC}{G} \quad (19)$$

Označimo odnos induktivnosti voda i Heaviside-ove induktivnosti sa  $l=L/L_H$ . Ovaj faktor ispunjenosti Heaviside-ovog uslova može se povezati sa koeficijentom  $k$  predloženim u referenci [5]:  $l=(1-k)/(1+k)$ . U Tabeli 1 date su vrednosti karakterističnih funkcija prostiranja za dve granične

učestanosti  $\omega \rightarrow 0$  i  $\omega \rightarrow \infty$  u funkciji faktora ispunjenosti *Heaviside*-ovog uslova  $l$  kao i njihove vrednosti za  $l=1$ .

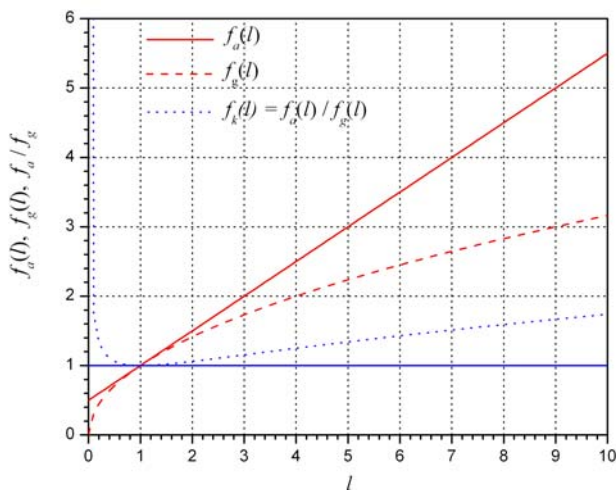
Tabela 1. Vrednosti karakterističnih funkcija prostiranja na vodu za  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  i *Heaviside*-ov uslov

K-čne funkcije prostiranja	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$	<i>Heaviside</i> -ov uslov ( $l=1$ )
$\beta(\omega)$	0	$\infty$	$\beta_H = \omega \sqrt{L_H C}$
$\alpha(\omega) / \alpha_H$	1	$\frac{(l+1)/2}{\sqrt{l}}$	$\alpha_H = \sqrt{RG}$
$\tau_p(\omega) / \tau_{pH}$	$\frac{l+1}{2}$	$\sqrt{l}$	$\tau_{pH} = \sqrt{L_H C}$
$\tau_g(\omega) / \tau_{gH}$	$\frac{l+1}{2}$	$\sqrt{l}$	$\tau_{gH} = \sqrt{L_H C}$

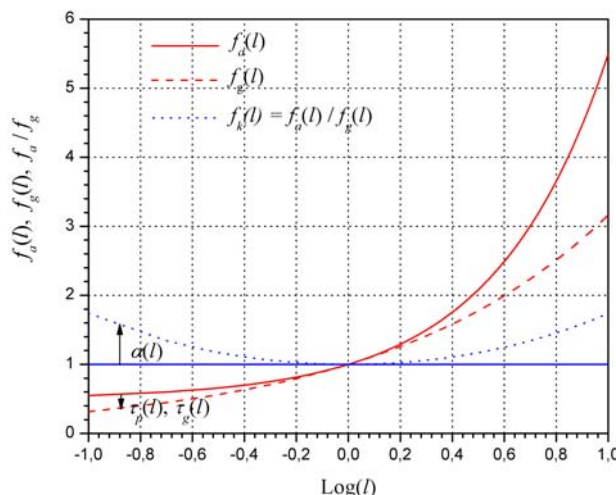
U cilju grafičke ilustracije vrednosti karakterističnih funkcija prostiranja između graničnih vrednosti datih u Tabeli 1 uvedimo sledeće funkcije:

$$f_a(l) = \frac{l+1}{2}, f_g(l) = \sqrt{l}, f_k(l) = \frac{f_a(l)}{f_g(l)} = f_k(1/l) \quad (20)$$

Ove funkcije, u linearnoj i logaritamskoj skali, prikazane su na Sl.2a i Sl.2b, respektivno.



a)



b)

Sl.2. a) Linearna skala, b) Logaritamska skala

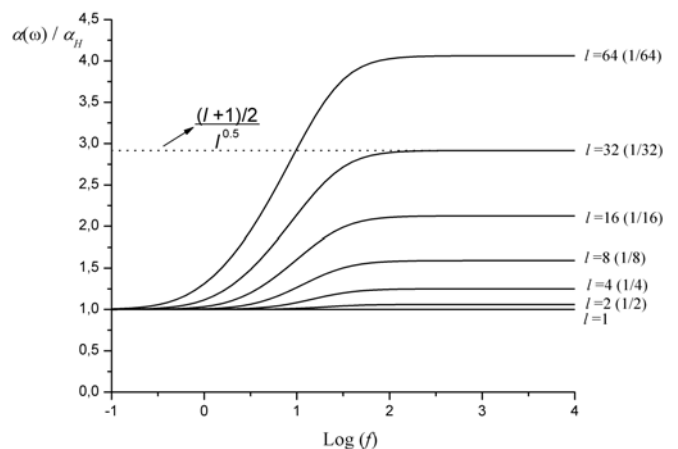
Vodovi koji se koriste u telekomunikacijama imaju malu podužnu induktivnost pa je faktor  $l$  u praksi uvek manji od 1 (čak i sa umetnutim pupinovim kalemovima) ali su za potrebe teorijske analize uzete i vrednosti ovog faktora veće od 1. Sa Sl.2 se može uočiti da se sa povećanjem faktora  $l$  sužava oblast mogućih promena slabljenja kao i grupnog i faznog kašnjenja sa frekvencijom. Taj trend traje sve do  $l=1$ , a zatim se oblast promene ovih parametara povećava sa povećanjem  $l$ . Pored toga, za vrednosti faktora  $l$  oko 1 imamo vrlo male promene ovih parametara sa frekvencijom pa ih možemo smatrati konstantnim. Na osnovu Tabele 1 i Sl.2 mogu se dati sledeće relacije koje identifikuju oblast frekvencijske promene konstante prostiranja, faznog i grupnog kašnjenja sa faktorom  $l$ :

$$1 \leq \alpha(\omega) / \alpha_H \leq f_k(l) \quad (21)$$

$$f_a(l) \geq \tau_p(g)(\omega) / \tau_{p(g)H} \geq f_g(l) \quad (22)$$

Zavisnosti konstante slabljenja, faznog i grupnog kašnjenja normalizovanih sa njihovim vrednostima pri ispunjenju *Heaviside*-ovog uslova, kao i fazne konstante od frekvencije, za različite vrednosti faktora  $l$ , date su Sl.3,4,5 i 6, respektivno. Pri tome je izabran propusni opseg do 10 KHz jer odgovara opsegu koji se razmatra pri prenosu telefonskih signala u osnovnom opsegu frekvencija. Pored toga, radi se o relativno niskim frekvencijama za koje se može zanemariti promena podužnih parametara voda sa frekvencijom. Primarni podužni parametri voda koji su korišćeni za proračun su preuzeti iz reference [5] za kabl koji je bio postavljen preko Lamanša:  $R=14.2 \Omega/\text{milja}$ ,  $C=138 \text{ nF}/\text{milja}$  i  $G=24 \mu\text{S}/\text{milja}$ . Induktivnost potrebna za ispunjenje *Heaviside*-ovog uslova se dobija iz jednačine (19) kao  $L_H=0.08165 \text{ H}/\text{milja}$ . Vrednost faktora  $l$  je menjana promenom podužne induktivnosti voda.

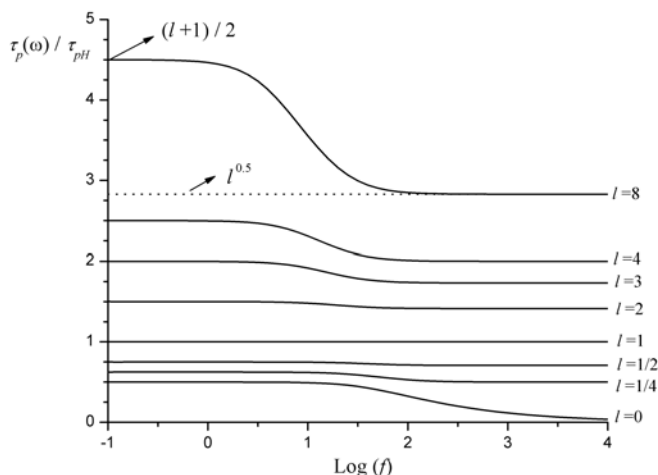
Sa Sl.3 se može videti da normalizovane krive slabljenja nezavisno od faktora  $l$  polaze od 1, odnosno  $\alpha_H$ , monotono rastu i asimptotski se sa porastom frekvencije približavaju pravama čiji je položaj određen funkcijom  $f_k(l)$ . Značajno je napomenuti da su asimptote iste za faktor  $l$  i  $1/l$  jer je  $f_k(l) = f_k(1/l)$ , sto se može videti i na Sl.2b gde je kriva  $\alpha(l)$  simetrična u odnosu na  $l=1$ .



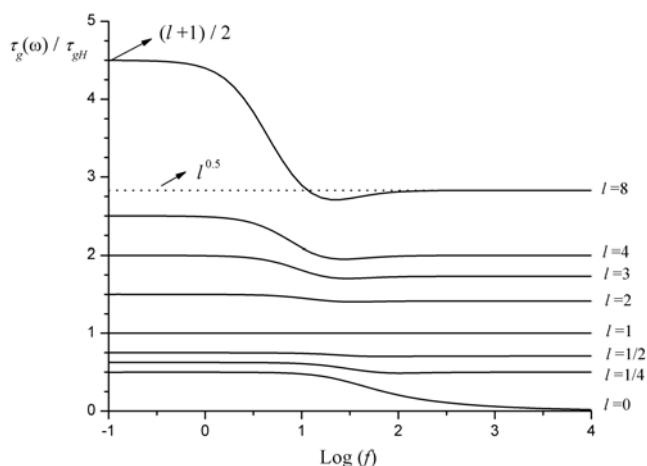
Sl.3. Zavisnost konstante slabljenja od frekvencije za različite vrednosti faktora  $l$

Krive faznog i grupnog kašnjenja (Sl.4 i Sl.5) za dato  $l$  polaze iz tačaka definisanih funkcijom  $f_a(l)$  i asimptotski se, sa porastom frekvencije, približavaju pravama čija je lokacija

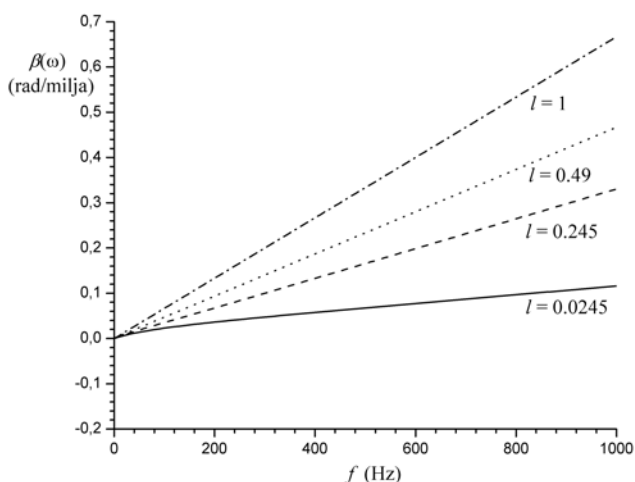
definisana funkcijom  $f_g(l)$ . U frekvencijskom opsegu do oko 100 Hz, imamo najveću promenu faznog i grupnog kašnjenja sa frekvencijom. Za  $l > 1$  kašnjenja su veća od vrednosti koja odgovara Heaviside-ovom uslovu,  $\tau_{pH} = \tau_{gH}$ , datoj u Tabeli 1, a za  $l < 1$  kašnjenja koja se unose su manja. Pored toga, za isto  $l$ , fazno i grupno kašnjenje polaze iz iste tačke i završavaju se u istoj tački.



Sl.4. Zavisnost faznog kašnjenja od frekvencije za različite vrednosti faktora  $l$



Sl.5. Zavisnost grupnog kašnjenja od frekvencije za različite vrednosti faktora  $l$



Sl.6. Zavisnost fazne konstante od frekvencije za različite vrednosti faktora  $l$

Na Sl.6 prikazana je vrednost za faznu konstantu proračunata korišćenjem jednačine (3) za različite vrednosti faktora  $l$ . Može se primeniti da se kriva koja daje zavisnost fazne konstante od frekvencije sve više linearizuje sa porastom faktora  $l$ . Za  $l=1$  vrednost fazne konstante odgovara njenoj vrednosti pri Heaviside-ovom uslovu,  $\beta_H$ , datoj u Tabeli 1. U tom slučaju signal se prostire duž voda bez disperzije dok su grupna i fazna brzina jednake na svim frekvencijama.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom radu je analizirano ponašanje karakterističnih funkcija prostiranja na vodu u funkciji promene podužne induktivnosti. Za potrebe analize uveden je novi parametar – faktor ispunjenosti Heaviside-ovog uslova preko koga su izražene granične vrednosti ovih funkcija. Izvršena analiza omogućava, između ostalog, da se izvrši procena za koliko je potrebno povećati podužnu induktivnost voda (npr. umetanjem pupiniovih kalemova), a da to nije Heaviside-ova induktivnost, da bi se promena slabljenja kao i grupnog i faznog kašnjenja sa frekvencijom zadržala u prihvatljivim granicama sa stanovišta disperzije pri prostiranju signala na vodu. U narednim radovima biće prezentovana matricna analiza pupinizovanog voda u funkciji broja ekvidistantno umetnutih kalemova po talasnoj dužini koja odgovara maksimalnoj frekvenciji od interesa.

## LITERATURA

- [1] L. Cohen, *Heaviside's Electrical Circuit Theory*, McGraw Hill Book Co., London, 1928.
- [2] M. Pupin, *Art of Reducing Attenuation of Electrical Waves and Apparatus Therefore*, patent No. 652 230, June 19, 1900, application filed December 14, 1899.
- [3] P. Miljanić, *Teorija prostiranja periodičnih električnih struja*, Fototipsko izdanje, SANU, Beograd, 2004.
- [4] P.F. Combes, *Microwave Transmission for Telecommunications*, John Wiley & Sons, 1991.
- [5] A. Marinčić, R. Biljić, "Hevisajdov kriterijum i propusni opseg kablova", *XII Telekomunikacioni Forum TELFOR 2004*, Beograd, 23-25 Novembar 2004.
- [6] A. Marinčić, "Analysis of Transmission Line with Periodical Inductance Loading", *Microwave Review*, Vol.10. No.2, 2004, pp.43-48.

**Abstract** – In this paper, Heaviside's criterion for TEM transmission line, that provides a wave propagation along a line without disperzion, is presented. Through an introduction of Heaviside's criterion fulfillment factor, an influence of per-unit length inductance increase on the transmission line behaviour is discussed. Limit values of characteristic propagation functions are derived and an analysis of their behaviour in the frequency domain for different values of proposed factor is done.

## PER-UNIT LENGTH INDUCTANCE INFLUENCE ON TRANSMISION LINE CHARACTERISTICS

Bratislav Milovanović, Aleksandar Marinčić, Nebojša Dončov, Mladen Randelović