

## VERTIKALNI HERTZ-OV DIPOL IZNAD POLUPROVODNE SREDINE: PRIKAZ JEDNOSTAVNIH MODELA SOMMERFELD-OVOG INTEGRALA

Milica Rančić, Predrag Rančić, *Elektronski fakultet u Nišu*

*Nagrađeni rad mladog istraživača – komisija AP*

**Sadržaj** – U ovom radu dat je pregled jednostavnih izraza sa kojima je modelovano Sommerfeld-ovo integralno jezgro (SIK) za slučaj vertikalnog Hertz-ovog dipola (VHD) postavljenog iznad homogene i izotropne poluprovodne sredine. Na bazi numeričkih izračunavanja rezultati su grafički središnji i upoređeni sa rezultatima tačnih izračunavanja.

### 1. UVOD

Na Elektronskom fakultetu u Nišu je zadnjih desetak godina predloženo više jednostavnih modela za numeričko izračunavanje Sommerfeld-ovih integrala koji se javljaju pri modelovanju EM polja u okolini žičanih provodnika koji su postavljeni iznad homogene i izotropne poluprovodne sredine.

Jedan broj predloženih izraza izveden je uz pretpostavku da je moduo indeksa refrakcije  $\underline{n}$ , zapravo moduo korena relativne kompleksne permitivnosti, mnogo veći od jedinice. Numerički eksperimenti su pokazali da je dovoljno da indeks refrakcije bude veći od tri pa da izlazni rezultati za raspodelu struje na anteni i ulaznu impedansu antene budu zadovoljavajuće tačnosti. Ovi rezultati, uz jednostavnost i zadovoljavajuću tačnost, imaju i praktični značaj jer je uslov  $n > 3$  zadovoljen u najvećem broju slučajeva homogene zemlje (npr.  $\epsilon_{r1} = 10$  i  $\sigma_1 \lambda_0 \in [0, \infty)$ ). Ovi izrazi su dobijeni razvojem koeficijenta refleksije (ili transmisije) u integrandu Sommerfeld-ovih integrala u red geometrijske progresije i pri tom su usvojena samo prva dva člana dobijenog reda ([5]-[11], [14], [15] i [16]).

Drugi broj jednostavnih izraza se zasniva na razvoju koeficijenta refleksije rasejanog polja u integrandu Sommerfeld-ovih integrala u Taylor-ove redove u okolini karakterističnih tačaka promenljive  $u_0$  (npr.  $u_0 = \underline{\gamma}_0$ ,  $u_0 = u_{B1}$ ,  $u_0 = u_{B2}$ ,  $u_0 = u_m$  i  $u_0 = 0$ ). Usvajanjem prva tri člana ovih redova dobijeni su jednostavni aproksimativni izrazi za SIK, a njihovom primenom su dobijeni i vrlo dobri izlazni rezultati za raspodelu struje i ulaznu impedansu ([12], [17]). Osim toga, Taylor-ovi razvoji su ukazivali na mogućnost da se napišu i u vidu eksponencijalne funkcije  $B + A \exp(-u_0 \underline{d})$ , gde su  $B$ ,  $A$  i  $\underline{d}$  kompleksne konstante koje zavise samo od kompleksne relativne permitivnosti  $\epsilon_{r1}$ . Za ovakav razvoj je naravno potrebno da se Taylor-ov red preuredi tako da eksponencijalna funkcija ima očekivani tok (npr. kada  $n \rightarrow \infty$  treba da konstanta  $\underline{d} \rightarrow 0$ , ili  $\underline{d} \rightarrow \infty$ , [18]).

Treća grupa jednostavnih izraza proistekla je iz iskustva stečenog pri formiranju prethodne dve grupe izraza. Naime, koeficijent refleksije se pretpostavi u obliku funkcije od  $u_0$  iz prve dve grupe, ali sa nepoznatim kompleksnim konstantama. Nepoznate konstante se zatim određuju metodom podešavanja u karakterističnim tačkama. Ako se aproksimativna funkcija predloži u složenijem obliku, onda se nepoznate konstante mogu određivati podešavanjem funkcije i prvog izvoda u karakterističnim tačkama ([13]).

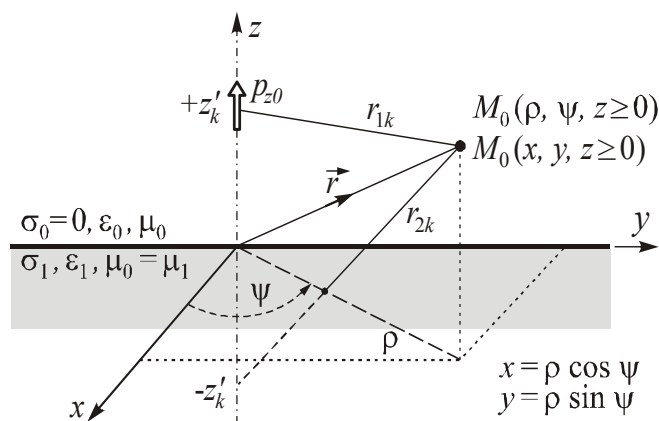
U ovom radu biće prikazan jedan broj ovih jednostavnih aproksimativnih izraza za Sommerfeld-ov integral (Sommerfeld-ovo integralno jezgro - SIK) koji se odnose na problem vertikalnog Hertz-ovog dipola (VHD) postavljenog iznad homogene i izotropne poluprovodne sredine. Na osnovu numeričkih eksperimenata deo rezultata za SIK biće prikazan u ovom radu u funkciji radijalnog rastojanja posmatrane tačke, dok su visina, položaj VHD, i električni parametri sredine različito usvajani. Pored poređenja modela, koje se može sagledati iz analitičkih prikaza, urađen je veći broj i numeričkih eksperimenata, od kojih je jedan broj ilustrovan na grafcima. Zahvaljujući ref. [20], na istim grafcima su prikazane i numeričke vrednosti tačnih izračunavanja prema [20], kako bi se sagledala valjanost predloženog modela poređenjem rezultata sa tačnim izračunavanjem SIK.

Iz razloga što na prethodnim konferencijama ETRAN-a treći model SIK nije prezentovan, a takođe i zbog ograničenog prostora, u ovom radu je dat samo jedan broj numeričkih eksperimenata u kojima je izvršeno poređenje trećeg modela SIK sa rezultatima koje daje programski paket iz [20].

### 2. KRATAK TEORIJSKI OPIS

#### 2.1. Postavka problema

VHD je postavljen u vazduhu ( $\sigma_0 = 0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ) na visini  $z'_k$  u odnosu na ravnu površinu homogene i izotropne sredine električnih parametara  $\sigma_1$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0$ ,  $\mu_1 = \mu_0$ . Korišćene su i sledeće oznake:  $\underline{\sigma}_i = \sigma_i + j\omega \epsilon_i$ ,  $i = 0, 1$  - kompleksna specifična provodnost,  $\underline{\gamma}_i = \alpha_i + j\beta_i = (j\omega \mu_i \underline{\sigma}_i)^{1/2}$ ,  $i = 0, 1$  - kompleksna konstanta prostiranja,  $\underline{\epsilon}_{r1} = \epsilon_{r1} - j\epsilon_{i1} = \epsilon_{r1} - j60\sigma_1 \lambda_0$  - kompleksna relativna permitivnost,  $\underline{n} = (\underline{\epsilon}_{r1})^{1/2}$  - kompleksni koeficijent refrakcije,  $\lambda_0$  - talasna dužina u vazduhu i  $\omega = 2\pi f$  - kružna frekvencija.



Sl.1. Ilustracija geometrije VHD-a iznad poluprovodne sredine

Za opisani model VHD, Sommerfeld-ov integral, koji opisuje rasejano polje od površine poluprovodne sredine u Green-ovoj funkciji za Hertz-ov vektor potencijal, dat je sledećim izrazom:

$$S_{00}^v(r_{2k}) = \int_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{R}_{z10}(\alpha) \cdot \tilde{K}_0(\alpha, r_{2k}) d\alpha \quad (1)$$

gde su  $\tilde{R}_{z10}(\alpha)$  i  $\tilde{K}_0(\alpha, r_{2k})$  - koeficijent refleksije (KRT) i standardno jezgro potencijala od lika u ravnom ogledalu u transformisanom domenu promenljive  $\alpha$ , respektivno. Opisani su sledećim poznatim izrazima:

$$\tilde{R}_{z10}(\alpha) = \tilde{R}_{z10}(u_0) = \frac{\varepsilon_{r1} u_0 - u_1}{\varepsilon_{r1} u_0 + u_1}, \quad (2)$$

$$\tilde{K}_0(\alpha, r_{2k}) = \frac{e^{-u_0(z+z'_k)}}{u_0} \alpha J_0(\alpha \rho), \quad (3a)$$

$$K_0(r_{2k}) = \frac{e^{-\underline{\gamma}_0 r_{2k}}}{r_{2k}} = \int_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{K}_0(\alpha, r_{2k}) d\alpha \quad (3b)$$

gde je:  $u_0 = \sqrt{\alpha^2 + \underline{\gamma}_0^2}$  i  $u_1 = \sqrt{\alpha^2 + \underline{\gamma}_1^2} = \sqrt{u_0^2 + \underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_0^2}$ ,  $r_{2k} = \sqrt{\rho^2 + (z + z'_k)^2}$  i  $J_0(\alpha \rho)$  - Bessel-ova funkcija nulnog reda prve vrste.

## 2.2. Prvi aproksimativni model za SIK

Pod uslovom da je  $n \gg 1$  i usvajanjem  $u_1 \cong \underline{\gamma}_1$ , razvojem u red geometrijske progresije se dobija:

$$\tilde{R}_{z10}(u_0) \cong 1 - \underline{D}_0 \frac{\underline{\gamma}_0}{u_0} + \frac{1}{2} \underline{D}_0^2 \frac{\underline{\gamma}_0^2}{u_0^2} \dots, \quad (4a)$$

a smenom u (1) ima se

$$S_{00}^v(r_{2k}) \cong K_0(r_{2k}) - \underline{D}_0 \underline{\gamma}_0 \int_{v_1=z+z'_k}^{\infty} K_0(r_{2k}) dv_1 + \dots, \quad (4b)$$

gde je  $\underline{D}_0 = \underline{\gamma}_0 \underline{d}_0 = 2/\underline{n}$ .

## 2.3. Drugi aproksimativni model za SIK

Razvojem (2) u Taylor-ov red u okolini tačaka  $u_0 = \underline{\gamma}_0$  i  $u_0 = 0$ , respektivno se dobija:

$$\tilde{R}_{z10}(u_0) \cong R_0 \left[ 1 + (u_0 - \underline{\gamma}_0) \left( \frac{\underline{D}_0}{\underline{\gamma}_0} \right) - \frac{(u_0 - \underline{\gamma}_0)^2}{2} \left( \frac{\underline{D}_0}{\underline{\gamma}_0} \right)^2 \frac{2\underline{n}^2 - 2\underline{n} + 3}{2\underline{n}} + \dots \right], \quad (5a)$$

$$\tilde{R}_{z10}(u_0) \cong -1 + \underline{D}_1 \frac{u_0}{\underline{\gamma}_0} - \frac{\underline{D}_1^2}{2} \frac{u_0^2}{\underline{\gamma}_0^2} + \dots, \quad (6a)$$

gde je  $R_0 = (\underline{n}-1)/(\underline{n}+1)$  i  $\underline{D}_1 = \underline{\gamma}_0 \underline{d}_1 = (2\underline{n}^2/(\underline{n}^2-1))^{1/2}$ .

Usvajanjem prva tri člana u (5a) i (6a), i njihovom smenom u (1), respektivno se dobija:

$$S_{00}^v(r_{2k}) \cong R_0 \left[ A_1 K_0(r_{2k}) - \frac{B_1}{\underline{\gamma}_0} \frac{\partial K_0(r_{2k})}{\partial z} + \frac{C_1}{\underline{\gamma}_0^2} \frac{\partial^2 K_0(r_{2k})}{\partial z^2} \right], \quad (5b)$$

$$S_{00}^v(r_{2k}) \cong -K_0(r_{2k}) - \frac{\underline{D}_1}{\underline{\gamma}_0} \frac{\partial K_0(r_{2k})}{\partial z} - \frac{\underline{D}_1^2}{\underline{\gamma}_0^2} \frac{\partial^2 K_0(r_{2k})}{\partial z^2}, \quad (6b)$$

gde su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  konstante koje se određuju iz (5a).

## 2.4. Treći aproksimativni model za SIK

Kada se (4a) napiše u vidu izraza:

$$\tilde{R}_{z10}(u_0) \cong B + A \frac{\underline{\gamma}_0}{u_0}, \quad (7a)$$

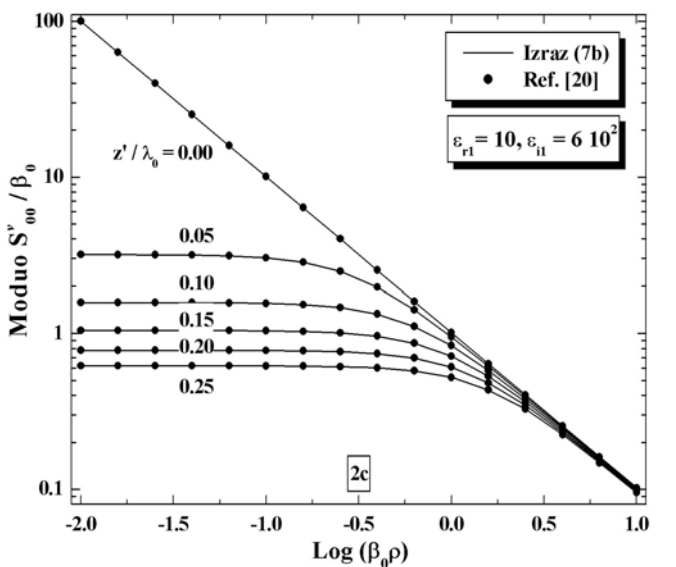
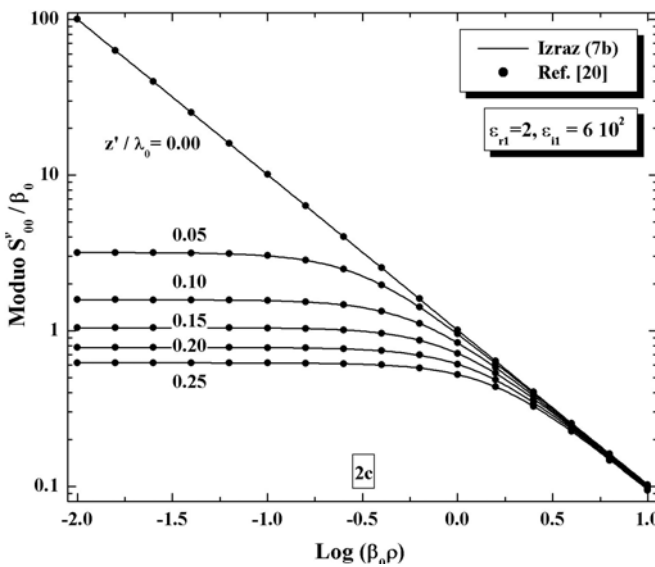
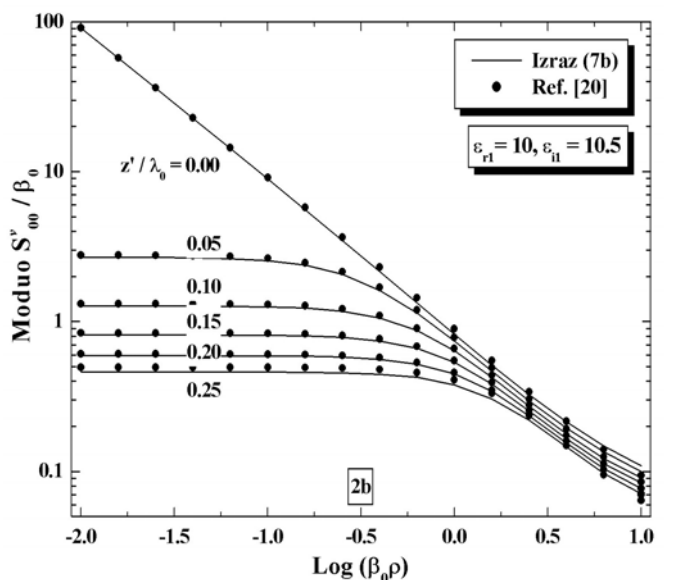
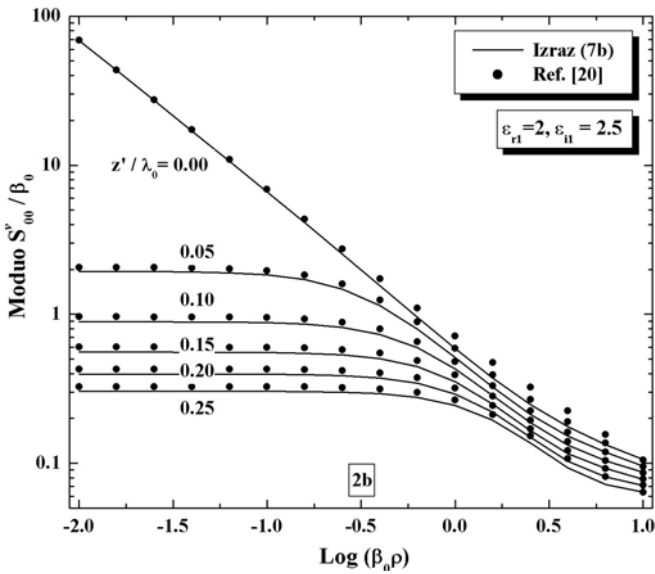
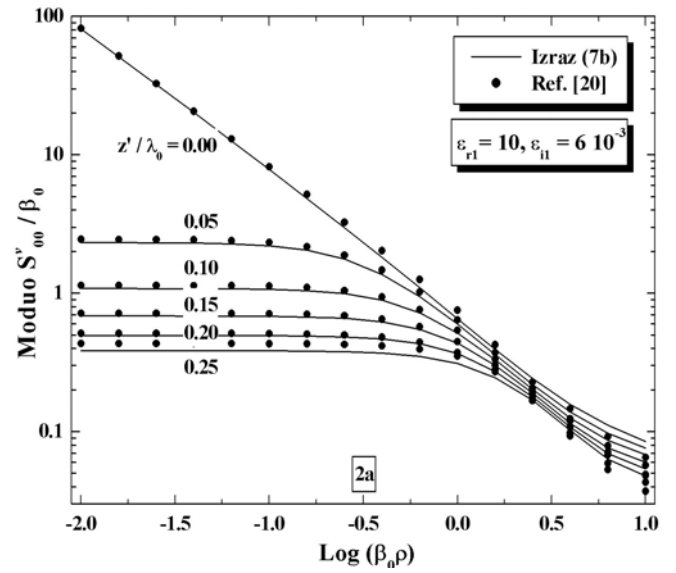
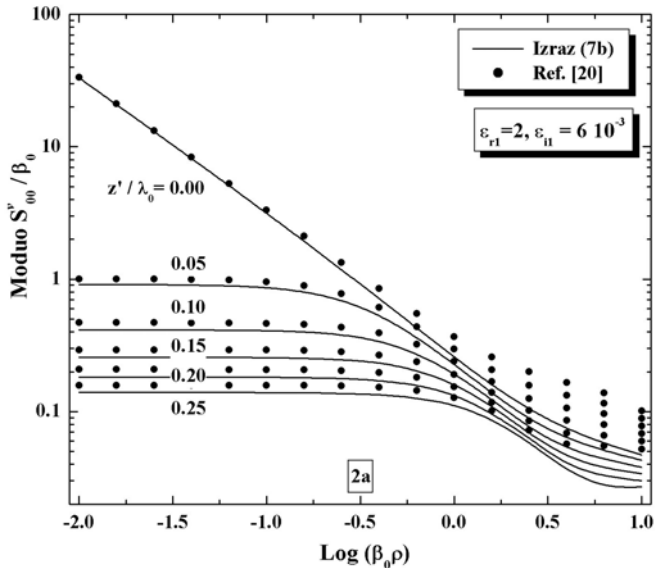
a nepoznate konstante  $B$  i  $A$  odrede podešavanjem u tačkama  $u_0 = \underline{\gamma}_0$  i  $u_0 \rightarrow \infty$ , dobija se da je  $B = R_\infty = (\underline{n}^2 - 1)/(\underline{n}^2 + 1)$ , a  $A = (R_0 - R_\infty)$ . Smenom (7a) u (1), sa usvojenim izrazima za  $B$  i  $A$ , dobija se:

$$S_{00}^v(r_{2k}) \cong R_\infty K_0(r_{2k}) + (R_0 - R_\infty) \underline{\gamma}_0 L(r_{2k}), \quad (7b)$$

gde je  $L(r_{2k})$  novo integralno jezgro definisano u drugom članu izraza (4b). Kada je radijalno rastojanje  $\rho \gg (z + z'_k)$ , ovaj integral se vrlo efikasno izračunava kao  $L(r_{2k}) \cong Li(\beta_0 r_{2k}) = Ci(\beta_0 r_{2k}) - j Si(\beta_0 r_{2k})$ . U drugim slučajevima integral  $L(r_{2k})$  se može svesti na dva integrala od kojih se jedan efikasno izračunava numeričkom integracijom, a drugi pomoću Bessel-ovih funkcija  $N_0(\beta_0 \rho)$  i  $J_0(\beta_0 \rho)$ .

*Napomena 1:* Kao tačka podešavanja se umesto  $u_0 = \underline{\gamma}_0$  mogu usvojiti i neke druge karakteristične tačke, npr. tačke koje odgovaraju nulama  $\tilde{R}_{z10}(u_0) = 0$ , tj. Brewster-ovom uglu.

*Napomena 2:* Uvidom u aproksimacije Taylor-ovim redovima, može se uočiti da je pod određenim uslovima veći deo redova moguće približno napisati preko eksponencijalne funkcije, tj. u formi  $\tilde{R}_{z10}(u_0) = B_i + A_i e^{-(u_0 - u_{0i}) \underline{d}_i}$ . Ovo naravno asocira na Prony-jevu aproksimaciju koja se često koristi za rešavanje problema ove vrste.



S1.2. Modulo normalizovane vrednosti SIK, za slučaj VHD, u funkciji radijalnog rastojanja tačke  $M_0(\rho, 0, z=0)$ . Relativna dielektrična konstanta je  $\epsilon_{r1} = 2$ , a položaj VHD i  $\sigma_1 \lambda_0$  su parametri

S1.3. Modulo normalizovane vrednosti SIK, za slučaj VHD, u funkciji radijalnog rastojanja tačke  $M_0(\rho, 0, z=0)$ . Relativna dielektrična konstanta je  $\epsilon_{r1} = 10$ , a položaj VHD i  $\sigma_1 \lambda_0$  su parametri

### 3. NUMERIČKI EKSPERIMENTI

Na osnovu predloženih modela izvršena su izračunavanja za normalizovanu vrednost Sommerfeld-ovog integrala (SIK:  $S_{00}^V / \beta_0$ ) za različite vrednosti parametara od kojih zavisi. U ovom radu su prikazane vrednosti dobijene trećom aproksimacijom, izraz (7b), i upoređene sa vrednostima iz [20].

Na Sl. 2 a,b i c je dat moduo SIK u funkciji radijalnog rastojanja posmatrane tačke koja je postavljena na razdvojnoj površini sredina,  $z = 0$ . Položaj VHD je parametar, relativna permitivnost sredine je  $\epsilon_{r1} = 2$ , a slike a,b i c, respektivno odgovaraju normalizovanim provodnostima  $\sigma_1 \lambda_0 = 10^{-4}$  S,  $\sigma_1 \lambda_0 = 0.041667$  S i  $\sigma_1 \lambda_0 = 10$  S.

Na Sl. 3 a,b i c je takođe dat moduo SIK, samo je uzeta veća vrednost za relativnu permitivnost, tj.  $\epsilon_{r1} = 10$ . Slike a, b i c, respektivno odgovaraju normalizovanim provodnostima  $\sigma_1 \lambda_0 = 10^{-4}$  S,  $\sigma_1 \lambda_0 = 0.175$  S i  $\sigma_1 \lambda_0 = 10$  S. Ostali parametri su isti sa onima na Sl. 2.

Na osnovu dosadašnjeg iskustva, a i na osnovu numeričkih eksperimenata, treća aproksimacija je dala najbolje rezultate i nije izvedena uz unapred postavljene uslove ograničenja. Aproksimacija važi u okolini VDA za sve kombinacije parametara od kojih zavisi SIK, kao što su parametri geometrije i električni parametri homogene i izotropne sredine.

### 4. ZAKLJUČAK

U radu je prezentovan jedan broj jednostavnih izraza kojima je modelovan Sommerfeld-ov integral za slučaj vertikalnog Hertz-ovog dipola postavljenog iznad poluprovodne sredine. Ovi izrazi su razvijeni na Elektronskom fakultetu u Nišu zadnjih desetak godina.

Na osnovu predloženih izraza napravljen je veći broj numeričkih eksperimenata kako bi se sagledala efikasnost predloženih izraza. Rezultati su poređeni sa vrednostima Sommerfeld-ovog integrala koje su dobijene tačnim izračunavanjima pomoću programskog paketa iz [20].

Na osnovu prikazanih rezultata se može zaključiti da je slaganje rezultata dobijenih predloženim modelom, koji je označen kao treći, izraz (7b), i rezultata tačnih izračunavanja, vrlo dobro.

Pored jednostavnosti i tačnosti, predloženi izraz se odlikuje generalnošću, tj. u okolini VHD predloženi izraz je u važnosti za sve parametre geometrije i poluprovodne sredine.

### LITERATURA

- [1] Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1949.
- [2] G.A. Lavrov, A.S. Knyazev, *Prizemnie i Podzemnie Antenni: Teoriya i Praktika Antenn, Razmeshchennikh Vblizi Poverkhnosti Zemli*, Izdatelstvo Svetskoe Radio, Moskva, 1965. (in Russian).
- [3] Banos, A.: *Dipole radiation in the Presence of a CondingHalf-space*, New York: Pergamon Press, 1966.
- [4] P.D. Rančić, "Vertical Monopole Antenna with Elevated Feeding in Presence of Water Flood Layer", Ph.D. Thesis, Faculty of Electrical Engineering in Niš, 1983. (in Serbian)
- [5] P.D. Rančić, "Contribution to Linear Antennas Analysis by New Forms of Systems of Integral Equations of Two Potentials", *Proc. of the 10th Conf. COMPUMAG'95*, pp. 328-329, Berlin, Germany, July 1995.
- [6] P.D. Rančić, J.V. Surutka, M.I. Kitanović, "The Influence of Finite Ground Conductivity on Characteristics

of a Vertical Mast (Monopole) Antenna With Elevated Feeding", *Proc. of the II Int. Symp. EMC'96*, pp. L1-2/427-432, Roma, Sep. 1996. (Poster Presentation Best Paper Award)

- [7] P.D. Rančić, M.I. Kitanović, "A New Model for Analysis of Vertical Asymmetrical Linear Antenna Above a Lossy Half-Space", *Int. J. Electron. Commun. AEÜ*, Vol. 51, No. 3, pp. 155-162, 1997.
- [8] P.D. Rančić, D.N. Mitić, Z.D. Stevanović, M.R. Simić, "EM Field in Vicinity of Transmitting Mast Antennas on a Conducting Half-Space", *Proc. of the III Int. Symp. EMC'98*, Vol. 2, pp. 719-724, Roma, Sep. 1998.
- [9] P.D. Rančić, Z.D. Stevanović, J.V. Surutka, "Coupled Horizontal Dipole Antennas Above a Conducting Half-Space", *Proc. of the III Int. Symp. EMC'98*, pp. Q1-12/725 - 730, Roma, Sep. 1998.
- [10] P.D. Rančić, Z.D. Stevanović, "Coupled Vertical Mast (Monopole) Antennas in the Presence of a Conducting Half-Space", *IEEE Trans. on Mag.*, Vol. 34, No. 5, pp. 2759-2762, Sep. 1998.
- [11] P.D. Rančić, "H.F.Yagi Antennas Above a Conducting Half-Space", *Facta Universitatis (Niš)*, Ser. Electron & Energetics, Vol. 14, No. 2, pp. 145-166, Aug., 2001.
- [12] P.D. Rančić, "An Efficient Method for Analysis of Horizontal Wire Antennas Placed Above a Ground Plane", *The 4<sup>th</sup> European Symp. on Electromagnetic Compatibility EMC'2000*, Vol.1, pp. 53-58, Brugge, 11-15. Sep., 2000.
- [13] M.P. Rančić, P.D. Rančić, "Vertical Linear Antennas in the Presence of a Lossy Half-Space: A New Simple and Efficient Model", *Int.J.Electron.Comun. (AEÜ)*, 2004. (accepted for publication).
- [14] Rančić P.D.: "Vertikalna asimetrična antena iznad realne homogene zemlje", *Zbornik radova XXXIX JU Konf. ETRAN'95*, Sveska II, str. 263-266, Zlatibor, Jun 1995.
- [15] Rančić P.D., Kitanović M.I.: "Prilog analizi vertikalnih antena postavljenih iznad homogene poluprovodne sredine", *II JU Konf. TELSIS'95*, str. 31-34, Oktobar, 10-12., 1995.
- [16] Kitanović M.I., Rančić P.D.: "Vertikalna monopol antena nad realnom zemljom", *Zbornik radova XL JU Konf. ETRAN'96*, Sveska II, str. 385-388, Budva, Jun 1996.
- [17] P.D. Rančić, Z.D. Stevanović, "A Simplified Model for Solving the Problem of Horizontal Linear Antenna Above a Lossy Half-Space", *Proc. of the III Int. Conf. TELSIS'97*, Vol. 1, pp. 84-87, Niš, Oct. 1997.
- [18] P.D. Rančić: "Jedna modifikacija aproksimacije Sommerfeld-ovog integralnog jezgra potencijala", *Zbornik radova XLV JU Konf. ETRAN'01*, Vol. 2, str. - , Arandelovac, Juni, 2001.
- [19] B.D. Popović, V.V. Petrović, "Vertical Wire Antenna above Ground: Simple Near-exact Image Solution", *IEE Proc. Pt. H* 140, pp. 501-507, 1993.
- [20] V.V. Petrović, Private communication, 2005.

**Abstract** - A review of simple expressions used for modeling the Sommerfeld's integral kernel (SIK) in the case of the vertical Hertz dipole (VHD) placed above a homogenous and isotropic medium, is given in this paper. The results based on numerical calculations were grafically aranged and compared to the ones obtained by accurate calculations.

### VERTICAL HERTZ DIPOLE ABOVE A LOSSY HALF-SPACE: PARALLEL PRESENTATION OF SIMPLE MODELS FOR SOMMERFELD'S INTEGRALS

Milica Rančić, Predrag Rančić