

PRORAČUN KAPACITIVNOSTI "SATURN" KONDENZATORA

Mirjana T. Perić, Saša S. Ilić, *Elektronski fakultet, Niš*
e-mail: {mika, silic}@elfak.ni.ac.yu

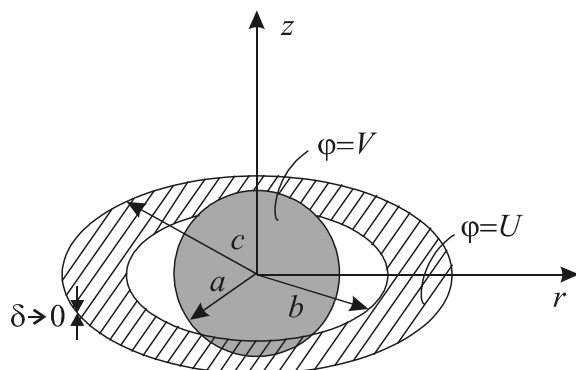
Sadržaj – U radu je predstavljen jedan veoma jednostavan postupak za proračun kapacitivnosti "Saturn" kondenzatora. Primenjen je metod ekvivalentne elektrode i teorema lika u sfernom ogledalu. Dobljeni rezultati za kapacitivnost jednog ovakvog kondenzatora prikazani su grafički dok je konvergencija kapacitivnosti data tabelarno.

1. UVOD

Za određivanje nepoznate kapacitivnosti primenjen je metod ekvivalentne elektrode. To je jednostavan numerički metod, razvijen na Katedri za teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu [1]. Osnovna ideja ovog metoda je da se postojeći elektrostatički sistem zameni sistemom pomoćnih tzv., ekvivalentnih elektroda. Zavisno od geometrije problema, oblik ekvivalentnih elektroda može biti različit. U slučaju dvodimenzionalnih problema, ekvivalentne elektrode su cilindrični provodnici kružnog poprečnog preseka, kod trodimenzionalnih problema ekvivalentne elektrode su sfere, dok se kod sistema sa aksijalnom simetrijom mogu primeniti lineični obruči. Poluprečnik ovih ekvivalentnih elektroda, u odgovarajućem sistemu, jednak je ekvivalentnom poluprečniku dela elektrode koju one zamenjuju. Takođe, potencijal ekvivalentnih elektroda je jednak potencijalu izvorne elektrode. Koristeći ovaj granični uslov da su sve ekvivalentne elektrode ekvipotencijalne, moguće je formirati sistem linearnih jednačina sa naelektrisanjem ekvivalentnih elektroda kao nepoznatom veličinom. Rešavajući ovaj sistem linearnih jednačina i nalaženjem nepoznatih naelektrisanja, moguće je odrediti potencijal, jačinu električnog polja kao i kapacitivnost čitavog sistema.

2. PRIMENA METODA

"Saturn" kondenzator obrazuju sfera poluprečnika, a , i tanak prsten zanemarljive debljine unutrašnjeg poluprečnika, b , i spoljašnjeg poluprečnika, c . Prsten se nalazi na potencijalu U , dok je sfera na nekom potencijalu V (Sl.1).



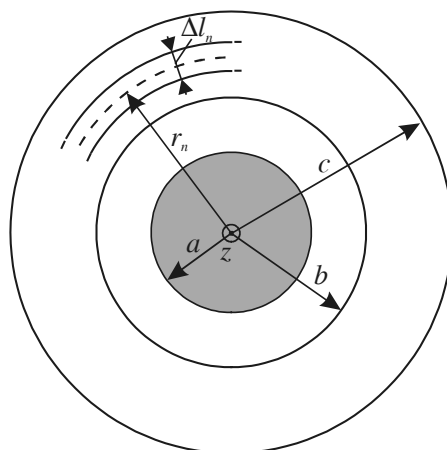
Sl.1. "Saturn" kondenzator.

Da bi odredili kapacitivnost ovakvog sistema, biće izvršena podela prstena na N prstenastih traka [2]. Poluprečnik n -te trake, prikazane na Sl.2, je

$$r_n = 0.5b \left[\left(\frac{c}{b} \right)^{n/N} + \left(\frac{c}{b} \right)^{(n-1)/N} \right], \quad (1)$$

dok je njena širina

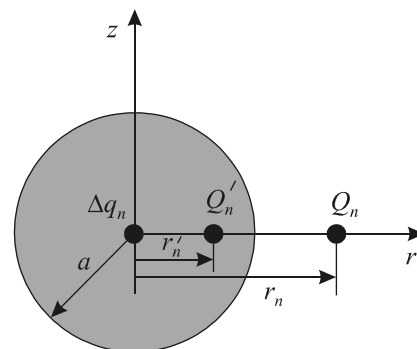
$$\Delta l_n = b \left[\left(\frac{c}{b} \right)^{n/N} - \left(\frac{c}{b} \right)^{(n-1)/N} \right]. \quad (2)$$



Sl.2. Podela prstena na trake.

Podela na prstenaste trake je izvršena tako da je vitkost kod svih ovako uočenih obruča ista, odnosno da je odnos njihovih poluprečnika i širine stalan. Prema metodu ekvivalentne elektrode, svaka od ovih prstenastih traka može da se zameni ekvivalentnim obručem poluprečnika r_n , kružnog poprečnog preseka poluprečnika $a_{en} = \Delta l_n / 4$.

Prema tome, sistem obrazuju sfera i N prstenastih trakastih obruča. Ukoliko se primeni teorema lika u sfernom ogledalu, dobija se ekvivalentan sistem koji čine primarna opterećenja trakastih obruča i njihovi likovi u sfernom ogledalu kao i jedno tačkasto opterećenje smešteno u centru sfere (Sl.3.).



Sl.3. Ekvivalentan sistem.

Likovi su takođe lineični obruči poluprečnika

$$r'_n = \frac{a^2}{r_n}, \quad (3)$$

dok je

$$Q_n' = -\frac{a}{r_n} Q_n \quad (4)$$

naelektrisanje n -tog obruča lika.

Kako provodni prsten i provodna lopta obrazuju kondenzator, njihova opterećenja moraju biti jednaka po apsolutnoj vrednosti, a suprotnog su znaka, pa je ukupno opterećenje lopte jednako $-Q$ [3]. Deo ovog opterećenja se raspodeljuje na naelektrisanja likova, dobijenih primenom teoreme lika u sfernom ogledalu.

Uticaj svih ovih opterećenja može se ekvivalentno predstaviti pomoću jednog unutrašnjeg obruča. Preostala opterećenja,

$$\Delta q_n = -Q_n - Q_n' = -\left(1 - \frac{a}{r_n}\right) Q_n \quad (5)$$

se ravnomerno raspoređuju po površini lopte, pa se njihov uticaj može ekvivalentno predstaviti pomoću jednog tačkastog opterećenja, intenziteta

$$\Delta q = \sum_{n=1}^N \Delta q_n, \quad (6)$$

smeštenog u centru lopte.

Tako je potencijal u tački $M(r, z)$

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi^2 \epsilon} \left[Q_n \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_n\right)}{\sqrt{(r+r_n)^2 + z^2}} + Q_n' \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_n'\right)}{\sqrt{(r+r_n')^2 + z^2}} + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta q_n}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right], \quad (7)$$

gde su

$K\left(\frac{\pi}{2}, k_n\right)$ i $K\left(\frac{\pi}{2}, k_n'\right)$ potpuni eliptički integrali prve vrste sa kvadratima modula

$$k_n^2 = \frac{4rr_n}{(r+r_n)^2 + z^2} \quad \text{i} \quad k_n'^2 = \frac{4rr_n'}{(r+r_n')^2 + z^2}.$$

Nepoznata naelektrisanja Q_n određuju se tako što se potencijal prikazan pomoću izraza (7) podesi na vrednost potencijala prstena u N tačaka podešavanja postavljenih na površini ekvivalentnih elektroda. Tako se dobija sledeći sistem linearnih jednačina

$$U = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{2\pi^2 \epsilon} \left[\frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{mn}\right)}{\sqrt{(r_m+r_n)^2 + \delta_{mn} a_{em}^2}} - \frac{a}{r_n} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{mn}'\right)}{r_m+r_n'} - \frac{\pi}{2r_m} \left(1 - \frac{a}{r_n}\right) \right], \quad m=1,2,\dots,N, \quad (8)$$

gde je δ_{mn} Kronecker-ov simbol,

dok su moduli potpunih eliptičkih integrala prve vrste

$$k_{mn}^2 = \frac{4r_m r_n}{(r_m+r_n)^2 + \delta_{mn} a_{em}^2} \quad \text{i} \quad k_{mn}'^2 = \frac{4r_m r_n'}{(r_m+r_n')^2}.$$

Kada se reši ovaj sistem jednačina, kapacitivnost "Satur" kondenzatora određuje se kao

$$C = \frac{Q}{U-V}, \quad (9)$$

gde je

$$Q = \sum_{n=1}^N Q_n \quad (10)$$

ukupno opterećenje prstenaste elektrode.

Potencijal lopte, obeležen sa V , potiče od naelektrisanja Δq smeštenog u centru sfere i on se određuje iz uslova da je sfera ekvipotencijalna.

3. NUMERIČKI REZULTATI

U Tablicama 1 i 2, prikazana je promena kapacitivnosti sa povećanjem broja ekvivalentnih elektroda, za različite dimenzije kondenzatora.

Tablica 1. Normalizovana vrednost kapacitivnosti za različiti broj ekvivalentnih elektroda, kada je $b/a = 1.5$ i $c/a = 2.5$.

N	$C/2\pi^2 \epsilon a$
1	0.968438880752
5	0.945962008118
10	0.943801936983
20	0.942222346172
30	0.941550857275
50	0.940921097177
100	0.940357763555
200	0.940021703690

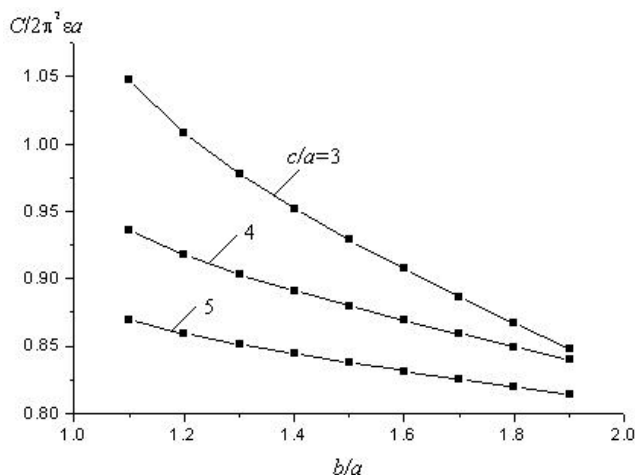
Tablica 2. Normalizovana vrednost kapacitivnosti za različiti broj ekvivalentnih elektroda, kada je $b/a = 1.5$ i $c/a = 8.0$.

N	$C/2\pi^2 \epsilon a$
1	0.806751200632
5	0.768028935627
10	0.765931714108
20	0.765024519752
30	0.764777280879
50	0.764620856989
100	0.764548100098
200	0.764540144543

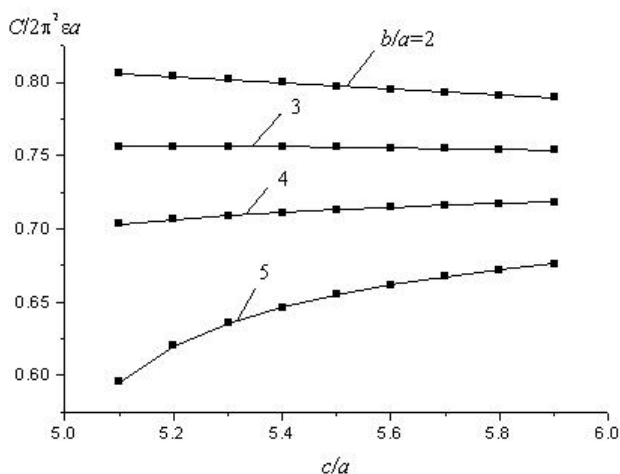
Na Sl.4 prikazana je zavisnost kapacitivnosti od odnosa b/a , pri čemu se odnos c/a održava konstantnim. Može se uočiti da, povećanjem širine prstena, kapacitivnost teži jednoj konstantnoj vrednosti.

Na Sl.5 predstavljena je zavisnost kapacitivnosti od odnosa c/a , kada je odnos b/a konstantan, a na Sl.6 se

odnos $c/a - b/a$ održava konstantnim, dok se odnos b/a menja.



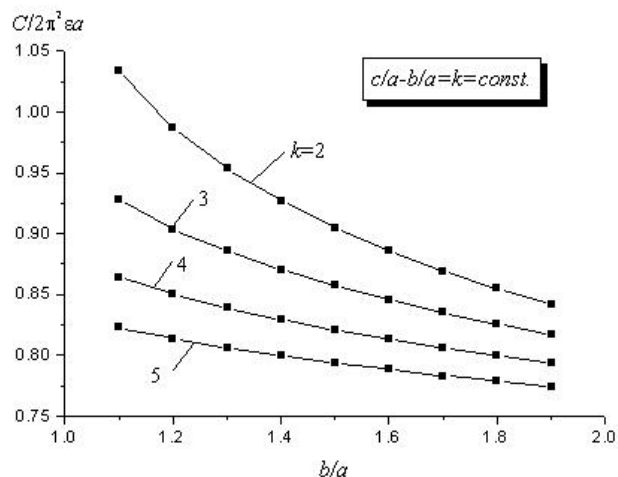
S1.4. Promena kapacitivnosti u funkciji b/a za $N = 100$ i različite vrednosti odnosa c/a .



S1.5. Promena kapacitivnosti u funkciji c/a za $N = 100$ i različite vrednosti odnosa b/a .

4. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana primena metoda ekvivalentne elektrode za proračun kapacitivnosti "Saturn" kondenzatora. Konvergencija rezultata je prikazana tabelarno dok su rezultati za kapacitivnost prikazani grafički.



S1.6. Promena kapacitivnosti u funkciji b/a za $N = 100$ i različite vrednosti odnosa $c/a - b/a$.

Iz dobijenih rezultata može se uočiti veoma dobra konvergencija rezultata sa relativno malim brojem ekvivalentnih elektroda na tri do četiri decimale. Na Sl. 5 se može uočiti da se kapacitivnost ovakvog kondenzatora praktično i ne menja značajnije u funkciji c/a za vrednost odnosa $b/a = 3$. Prsten je segmentiran prema izrazu (1) zato što je u ranijim istraživanjima pokazano da je tada greška koja se čini najmanja.

LITERATURA

- [1] D. M. Veličković: Equivalent Electrodes Method, *Scientific Review*, pp. 207-248, Belgrade, 1996.
- [2] S. R. Aleksić, S. R. Marković: Plitko ukopan prstenasti uzemljivač, *Zbornik radova XLVIII Konferencije za ET-RAN*, Čačak, 6-10 jun 2004, tom II, str. 221-224
- [3] D. M. Veličković: *Metodi za proračun elektrostatičkih polja*, Stil, Podvis, 1982.

Abstract – In this paper, the capacitance calculation of "Saturn" capacitor is presented. The equivalent electrodes method and point-matching method are used for calculation. The obtained results are shown graphically.

CAPACITANCE CALCULATION OF "SATURN" CAPACITOR

Mirjana T. Perić, Saša S. Ilić