

ПРОРАЧУН ПОЉА СТАЛНОГ МАГНЕТА ОБЛИКА ТОРУСА

Ана Н. Младеновић, Електронски факултет, Ниш
 e-mail: anam@elfak.ni.ac.yu,

Садржај – У раду је описан прорачун магнетног поља сталног магнета, облика торуса, хомогено намагнетисаног у правцу осе торуса. Метод коришћен за прорачун је заснован на систему еквивалентних магнетних дипола. Приказани су аналитички изрази као и линије магнетног поља и магнетне индукције у спољашњој области магнета.

1. УВОД

Уколико је позната густина магнетног момента, M , за одређивање расподеле магнетног поља сталног магнета се могу користити следећи методи:

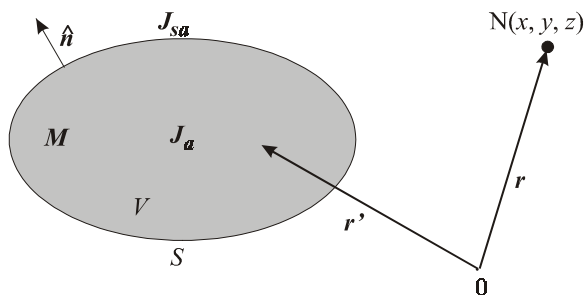
- Метод заснован на прорачуну магнетног вектор потенцијала, A , на основу познате расподеле густине микроскопских Амперових струја;
- Метод заснован на одређивању магнетног скалар потенцијала, решавањем Лапласове и Пуасонове једначине; и
- Метод заснован на систему еквивалентних магнетних дипола. [1]

Магнетно поље које потиче од намагнетисане материје може да се третира као поље система запреминских и површинских Амперових струја у вакууму, које се на основу познате густине магнетног момента, $M = M(r')$ могу одредити као:

$$J_a(r') = \text{rot } M(r'); \quad \text{и} \quad (1)$$

$$J_{sa}(r') = M(r') \times \hat{n}, \quad (2)$$

где је $J_a(r')$ густина Амперових струја у унутрашњости магнета запремине V , ограничене затвореном површином S , $J_{sa}(r')$ површинска густина Амперових струја на површини S , при чему је \hat{n} јединични вектор излазне нормале (Сл.1).



Сл.1. Стални магнет.

Ове струје стварају магнетни вектор потенцијал

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_a(r') \frac{dV'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S J_{sa}(r') \frac{dS'}{R}, \quad (3)$$

где је $R = |r - r'|$, растојање тачке у којој се одређује поље од елементарног извора.

Магнетна индукција је

$$B(r) = \text{rot } A(r). \quad (4)$$

Магнетно поље унутар сталног магнета је

$$H = B/\mu_0 - M. \quad (5)$$

Магнетно поље изван сталног магнета је

$$H = B/\mu_0. \quad (6)$$

Други метод је заснован на израчунавању магнетног скалар потенцијала ϕ_m . Унутар сталног магнета магнетни скалар потенцијал задовољава Пуасонову једначину

$$\Delta \phi_m = \text{div } M. \quad (7)$$

Магнетно поље се тада може одредити као

$$H = -\text{grad } \phi_m. \quad (8)$$

Изван сталног магнета је $M = 0$, па магнетни скалар потенцијал, ϕ_{m0} , задовољава Лапласову једначину

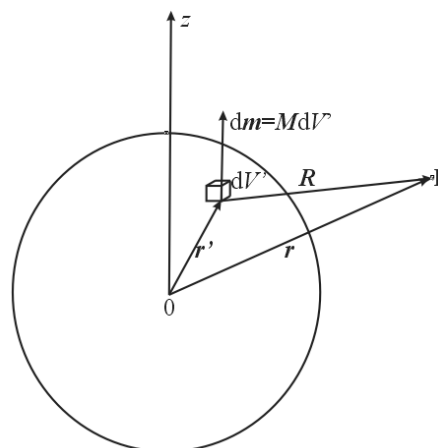
$$\Delta \phi_{m0} = 0, \quad (9)$$

тако да је $H_0 = -\text{grad } \phi_{m0}$. (10)

Трећи метод, који је и примењен у раду за прорачун магнетног поља је заснован на суперпозицији резултата добијених за елементарне магнетне диполе.

Елементарни магнетни дипол (Сл.2) има магнетни момент

$$dm = M dV'. \quad (11)$$



Сл.2. Елементарни магнетни дипол

Овај магнетни дипол ствара, у тачки P, елементарни магнетни скалар потенцијал

$$d\phi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{R dm}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{RM}{R^3} dV', \quad (12)$$

где је $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, растојање тачке у којој се одређује поље од елементарног извора, и $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Након интеграције израза (12) магнетни скалар потенцијал се може одредити као

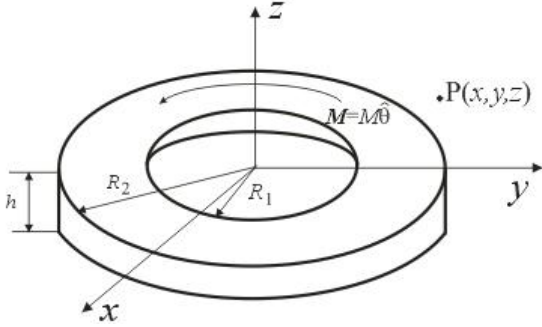
$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{R dm}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{RM}{R^3} dV'. \quad (13)$$

2. ОДРЕЂИВАЊЕ МАГНЕТНОГ СКАЛАР ПОТЕНЦИЈАЛА

Посматра се стални магнет облика торуса, правоугаоног попречног пресека, хомогено намагнетисан у правцу угаоне компоненте $\hat{\theta}$,

$$\mathbf{M} = M \hat{\theta}, \quad (14)$$

где су θ , r и z координате придруженог цилиндричног координатног система, приказаног на Сл.3.



Сл.3. Стални магнет облика торуса

Унутрашњи полупречник торуса је R_1 , спољашњи R_2 , а дебелина је h .

Изван сталног магнета, магнетни скалар потенцијал, у тачки поља $P(x, y, z)$, може да се одреди суперпозицијом резултата добијених за елементарни магнетни дипол, што је приказано једначином (13), причему је

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (15)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}. \quad (16)$$

Између координата Декартовог правоуглог координатног система и цилиндричних координата постоје везе

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \quad \text{и} \\ z &= z. \end{aligned} \quad (17)$$

Коришћењем ових веза растојање тачке у којој се одређује поље од елементарног извора се може представити

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2}. \quad (18)$$

Како вектор густине магнетног момента има само угаону компоненту θ , скаларни производ \mathbf{RM} се може представити

$$\mathbf{RM} = [(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}]M\hat{\theta}. \quad (19)$$

Веза између јединичних вектора \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} и $\hat{\theta}$ је

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \hat{z} \right), \quad (20)$$

тако да су задовољени и следећи изрази

$$\hat{\theta}\hat{x} = \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta}, \quad \hat{\theta}\hat{y} = \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad \hat{\theta}\hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}. \quad (21)$$

Из једначина (17) и (21) добијају се релације

$$\hat{\theta}\hat{x} = -\sin \theta, \quad \hat{\theta}\hat{y} = \cos \theta, \quad \hat{\theta}\hat{z} = 0, \quad (22)$$

тако да се скаларни производ, из израза (19), може приказати

$$\mathbf{RM} = Mr' \sin(\theta - \theta'). \quad (23)$$

Сменом израза (18) и (23) у (13), магнетни скалар потенцијал се добија као

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_{R_1 - \frac{h}{2}}^{R_2 + \frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{Mr' \sin(\theta - \theta') d r' d z' d \theta'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (24)$$

У $\theta = 0$ равни, магнетни скалар потенцијал има облик

$$\phi_m = -\frac{M}{4\pi} \int_{R_1 - \frac{h}{2}}^{R_2 + \frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{r' \sin \theta' d r' d z' d \theta'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta' + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (25)$$

Решење овог интеграла је

$$\begin{aligned} \phi_m = \frac{M}{4\pi} \left[R_2 \ln \frac{P_1 + C_1}{P_2 + C_3} \frac{P_2 + C_2}{P_1 + C_4} + R_1 \ln \frac{P_2 + C_5}{P_1 + C_7} \frac{P_1 + C_6}{P_2 + C_8} + \right. \\ \left. P_1 \ln \frac{P_3 + C_4}{P_4 + C_6} \frac{P_5 + C_1}{P_6 + C_7} + P_2 \ln \frac{P_6 + C_5}{P_5 + C_3} \frac{P_4 + C_8}{P_3 + C_2} + \right. \\ \left. r \ln \frac{P_1 + C_1}{P_1 + C_7} \frac{P_2 + C_5}{P_2 + C_3} + r \ln \frac{P_2 + C_8}{P_2 + C_2} \frac{P_1 + C_4}{P_1 + C_6} \right], \quad (26) \end{aligned}$$

где је $P_1 = z + \frac{h}{2}$, $P_2 = z - \frac{h}{2}$, $P_3 = r - R_2$,

$$P_4 = r - R_1, \quad P_5 = r + R_2, \quad P_6 = r + R_1,$$

$$C_1 = \sqrt{(r + R_2)^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2}, \quad C_2 = \sqrt{(r - R_2)^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2},$$

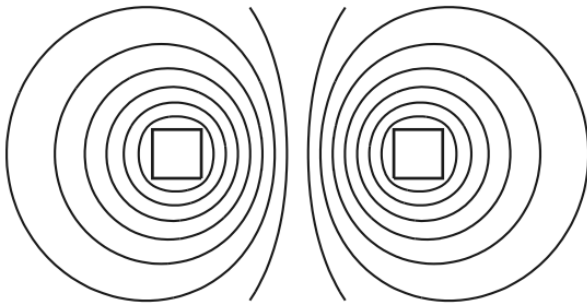
$$C_3 = \sqrt{(r+R_2)^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}, \quad C_4 = \sqrt{(r-R_2)^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2},$$

$$C_5 = \sqrt{(r+R_1)^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}, \quad C_6 = \sqrt{(r-R_1)^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2},$$

$$C_7 = \sqrt{(r+R_1)^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2}, \quad C_8 = \sqrt{(r-R_1)^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}.$$

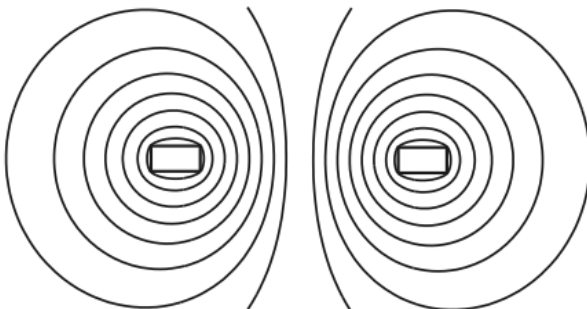
3. ЛИНИЈЕ ПОЉА

Магнетни скалар потенцијал зависи од радијалне r и аксијалне координате z . Функција магнетног скалар потенцијала, за $R_1/h = 2$ и $R_2/h = 3$, приказана је на Сл. 4.



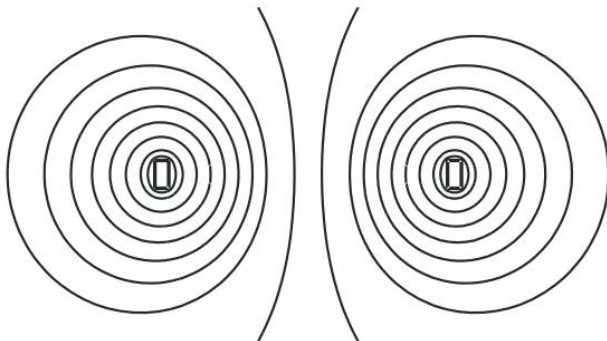
Сл.4.

Сл.5. представља функцију магнетног скалар потенцијала за $R_1/h = 4$ и $R_2/h = 6$.



Сл.5.

На Сл.6. приказана је функција магнетног скалар потенцијала за $R_1/h = 5$ и $R_2/h = 5.5$.



Сл.6.

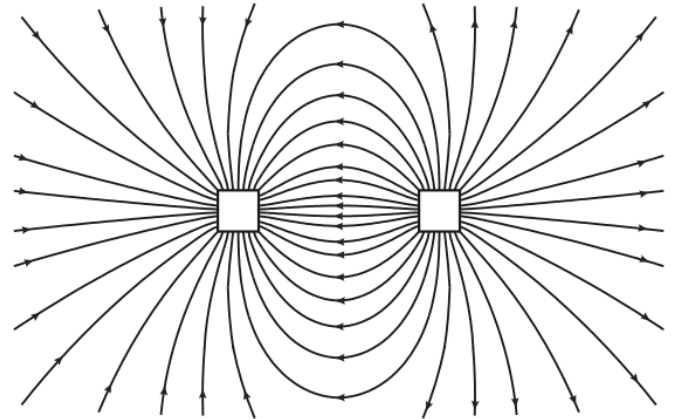
Вектор јачине магнетног поља, \mathbf{H} , има r и z компоненте које зависе од радијалне и аксијалне

координате. Како је позната функција магнетног скалар потенцијала ове компоненте се могу одредити

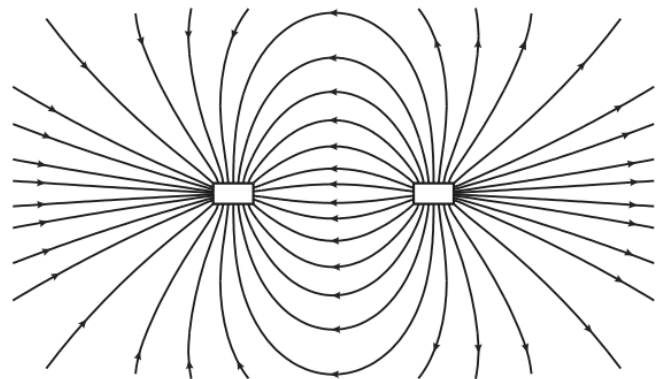
$$H_r = -\frac{\partial \Phi_m(r, z)}{\partial r}, \quad (27)$$

$$H_z = -\frac{\partial \Phi_m(r, z)}{\partial z}. \quad (28)$$

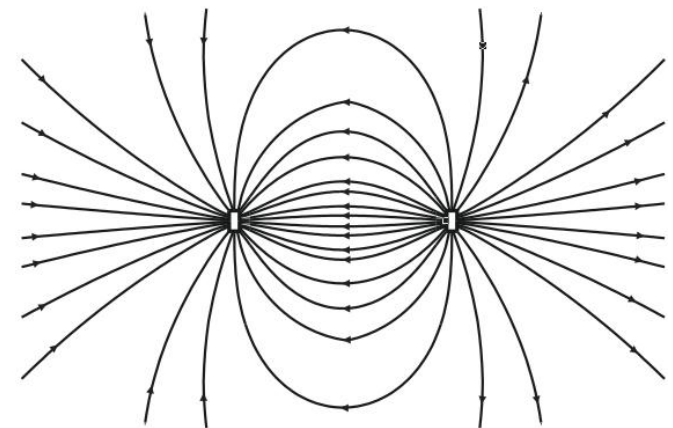
Линије магнетног поља, изван магнета, су приказане на сликама Сл.7 Сл.8 и Сл.9 за димензије торуса које су предходно поменуле, респективно.



Сл.7. Линије магнетног поља



Сл.8. Линије магнетног поља



Сл.9. Линије магнетног поља

Линије поља магнетне индукције имају исти облик као и линије магнетног поља.

4. ЗАКЉУЧАК

У раду је описан прорачун поља изван сталног магнета облика турса, хомогено намагнетисаног у правцу угаоне компоненте придруженог цилиндричног координатног система. Метод који је коришћен у раду заснива се на израчунавању магнетног скалар потенцијала применом резултата добијених за елементарне магнетне диполе. На основу одређених компоненти вектора јачине магнетног поља, приказане су линије магнетног поља и магнетне индукције. Линије поља густине магнетног момента не постоје изван магнета, док линије магнетног поља и магнетне индукције изван турса имају исту облик и оријентацију.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Textbook of Electromagnetics, Edited by Hermann Uhlmann (Veličković D. M., Chapter 3.2: Magnetostatic field), Technische Universitaet Ilmenau/De (To be published).
- [2] Д. М. Величковић: “Методи за прорачун електростатичких поља”, Стил, Подвис 1986.
- [3] Abramowitz M., Stegun A: “*Handbook of mathematical functions*”, Inc., New York, 1970.

- [4] Ј. С. Сурутка: “*Електромагнетика*”, Грађевинска књига Београд, 1986.
- [5] Д. М. Величковић: “*Електромагнетика-прва свеска*”, II издање, 1999.
- [6] А. Н. Младеновић, С. Р. Алексић: Стални магнет облика штапа, 48. Конференција ЕТРАН 2004, Чачак, 6-10. јун. 2004, Зборник радова.
- [7] A. N. Mladenovic: Toroidal shaped permanent magnet, International PhD Seminar computation of electromagnetic field, Budva, Serbia and Montenegro, September 23-28th 2004, Proceedings of Full Papers.

Abstract –This paper presents calculation of magnetic field of the toroidal shaped permanent magnet, homogeneously magnetised in known direction. Method that is used in the paper is based on a system of equivalent magnetic dipoles. The distribution of magnetic field and distribution of magnetic flux density of the permanent magnet are also shown in the paper.

CALCULATION OF MAGNETIC FIELD OF TOROIDAL SHAPED PERMANENT MAGNET

Ana Mladenović