

## ANALIZA POLJA SIMETRIČNE ARHIMEDOVE SPIRALE METODOM NAJMANJIH KVADRATA

Ana Jovanović, Svetozar Jovičević, Elektrotehnički fakultet u Podgorici

**Sadržaj** – U ovom radu je demonstrirana primjenljivost MNK u analizi polja simetrične Arhimedove spirale. Pokazalo se da se sa malim brojem baznih funkcija veoma dobro zadovoljava granični uslov, što dobijene rezultate čini pouzdanim. Dobijeno je polje spirale u dalekoj zoni.

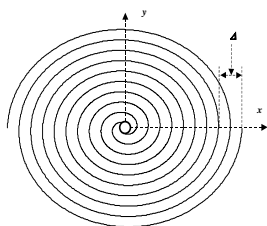
### 1. UVOD

Za analizu antenskih formi najčešće se koristi metod momenata, čija suština jeste u tome da se antena dijeli na veliki broj malih segmenata sa vrijednostima struje u njima kao nepoznatim veličinama ( vidi na pr. [1],[2],[3] ) što dovodi do rada sa matricama vrlo visokog reda. U posljednje vrijeme sve više se koristi metod konačnih razlika u vremenskom domenu ( vidi na pr. [4],[5],[6] ) u kome je jedan od osnovnih problema određivanje vještačke granice na kojoj se završava numerička procedura. Predstavljanje polja antene sistemom sopstvenih funkcija ([7]) dovodi kod analize polja u bliskoj zoni, čak i kod najjednostavnijih struktura do vrlo složene procedure.

U ovom radu će biti demonstrirana mogućnost primjene MNK u analizi polja simetrične Arhimedove spirale. Potencijal polja se predstavlja kao linearna kombinacija baznih funkcija talasne jednačine, a nepoznati koeficijenti razvoja se traže zadovoljenjem graničnog uslova na samoj spirali. Ovaj metod, u izvornoj ili modifikovanoj formi, pokazao se veoma prost i tačan na nizu različitih problema ( vidi na pr. [8],[9],[10],[11],[12],[13] ).

### 2. OPIS PROBLEMA I PRIMIJENJENOG METODA

Neka je zadata antenska struktura (slika 1.) koja leži u ravni xoy ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Antena se napaja izvorom prostoperiodičnog napona U.



Slika 1. Simetrična Arhimedova spirala

Antenska struktura oblika Arhimedove spirale ima dva kraka čija geometrija je opisana sledećim jednačinama u sfernom koordinatnom sistemu:

$$r = a\varphi\sqrt{2K\cos\varphi + 1 + k^2} + b \quad 0 \leq \varphi \leq 2m\pi \quad \text{gornji krak} \quad (1)$$

$$r' = a(\varphi - \pi)\sqrt{-2K\cos\varphi + 1 + k^2} + b \quad \pi \leq \varphi \leq (2m+1)\pi \quad \text{donji krak}$$

gdje je  $a = \frac{\Delta}{2\pi}$  konstanta spirale, b je koordinata početne tačke, k je ekscentričnost spirale. Za  $k=0$  imamo simetričnu Arhimedovu spiralu:

$$r = a\varphi + b \quad 0 \leq \varphi \leq 2m\pi \quad \text{gornji krak} \quad (1.a)$$

$$r' = a(\varphi - \pi) + b \quad \pi \leq \varphi \leq (2m+1)\pi \quad \text{donji krak}$$

U najopštijem slučaju polje zračenja, bilo u bliskoj ili dalekoj zoni, ne pripada ni TE ni TM talasu. Da bi našli komponente polja zračenja uvešćemo oba vektorska potencijala, tj magnetni i električni vektor potencijal:

$$A_r = \sum_{m,n} C_{mn} B_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \quad (2)$$

$$F_r = \sum_{m,n} D_{mn} B_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi}$$

gdje su  $C_{mn}$  i  $D_{mn}$  nepoznati koeficijenti razvoja,  $B_n(kr)$  Besselove f-je i  $P_n^m(\cos\theta)$  Ležandrovi polinomi.

Komponente polja date su sledećim izrazima [14]:

$$E_r = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r \quad H_r = \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r$$

$$E_\theta = \frac{-1}{r\sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{j\omega\epsilon r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \quad H_\theta = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{j\omega\mu r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \quad (2.a)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\epsilon r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi} \quad H_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu r \sin\theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \varphi}$$

Granični uslov jeste anuliranje tangencijalnih komponenti električnog polja na metalnoj površini krakova antene. U ovom slučaju tangencijalne komponente na površini krakova antene imaju  $E_\varphi$  i  $E_r$  komponentu električnog polja. Granični uslovi za gornji i donji krak antene dati su sledećim izrazima:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi_t} + E_{r_t} &= E_i \quad \text{za } 0 \leq r \leq b \\ E_{\varphi_t} + E_{r_t} &= 0 \quad \text{za } r \geq b \end{aligned} \right\} \text{gornjikrak} \quad (3.a)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi_t} + E_{r_t} &= -E_i \quad \text{za } 0 \leq r' \leq b \\ E_{\varphi_t} + E_{r_t} &= 0 \quad \text{za } r' \geq b \end{aligned} \right\} \text{donjikrak} \quad (3.b)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi_t} &= E_\varphi \cos\alpha \\ E_{r_t} &= E_r \sin\alpha \end{aligned} \right\} \text{gornji krak}, \quad \left. \begin{aligned} E_{\varphi_t} &= E_\varphi \cos\alpha' \\ E_{r_t} &= E_r \sin\alpha' \end{aligned} \right\} \text{donji krak}$$

Ugao koji zaklapa tangenta u svakoj tački krive sa komponentama polja je:

$$\alpha = \arctg \frac{dr}{r d\varphi}, \quad \alpha' = \arctg \frac{dr'}{r' d\varphi}$$

Stavljajući u granični uslov (3.a,b) izraz za komponente električnog polja (2.a), granični uslov se može pisati u sledećem obliku:

za gornji krak

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left( C_{nm} f_{nm}^{(1)} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) + D_{nm} f_{nm}^{(2)} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) \right) = \begin{cases} E_i & \text{za } 0 \leq r \leq b \\ 0 & \text{za } r \geq b \end{cases}$$

(4.a)

gdje su bazne funkcije:

$$f_{nm}^{(1)} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = \left( \frac{n(n+1)}{yr^2} B_n(kr) \sin \alpha + \frac{jm}{yr} \frac{\partial B_n(kr)}{\partial r} \cos \alpha \right) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi}$$

$$f_{nm}^{(2)} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = \frac{B_n(kr)}{r} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos \alpha e^{jm\varphi}$$

za donji krak

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left( C'_{nm} f'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) + D'_{nm} f'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) \right) = \begin{cases} -E_i & \text{za } 0 \leq r' \leq b \\ 0 & \text{za } r' \geq b \end{cases}$$

(4.b)

gdje su bazne funkcije:

$$f'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) = \left( \frac{n(n+1)}{y'r'^2} B_n(kr') \sin \alpha' + \frac{jm'}{y'r'} \frac{\partial B_n(kr')}{\partial r'} \cos \alpha' \right) P_n^m(\cos \theta) e^{jm'\phi}$$

$$f'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) = \frac{B_n(kr')}{r'} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos \alpha' e^{jm'\phi}$$

Sisteme (4a,b) radi jednostavnosti ćemo transformisati u sledeće izraze:

za gornji krak

$$\sum_{n,m} S_{nm} F_{nm} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = \begin{cases} E_i & \text{za } 0 \leq r \leq b \\ 0 & \text{za } r \geq b \end{cases} \quad (5.a)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} F_{nm} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) &= f_{nm}^{(1)} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) \\ S_{nm} &= C_{nm} \end{aligned} \right\} \text{za } n=1,2,\dots,N \text{ i } m=0,\dots,n$$

i

$$\left. \begin{aligned} F_{nm} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) &= f'_{n-N,m} \left( r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) \\ S_{nm} &= D_{n-N,m} \end{aligned} \right\} \text{za } n=N+1,\dots,2N \text{ i } m=0,\dots,n-N$$

za donji krak

$$\sum_{n,m} S'_{nm} F'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) = \begin{cases} -E_i & \text{za } 0 \leq r' \leq b \\ 0 & \text{za } r' \geq b \end{cases} \quad (5.b)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} F'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) &= f'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) \\ S'_{nm} &= C'_{nm} \end{aligned} \right\} \text{za } n=1,2,\dots,N \text{ i } m=0,\dots,n$$

i

$$\left. \begin{aligned} F'_{nm} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) &= f'_{n-N,m} \left( r', \frac{\pi}{2}, \phi \right) \\ S'_{nm} &= D'_{n-N,m} \end{aligned} \right\} \text{za } n=N+1,\dots,2N \text{ i } m=0,\dots,n-N$$

Postupkom opisanim u prethodnim glavama i ovdje dobijamo sistem algebarskih jednačina po nepoznatim koeficijentima razvoja  $S_{nm}$ :

$$\sum_{n,m} S_{nm} a_{nm,n'm'} = b'_{n'm'} \quad (3.6)$$

gdje su:

$$a_{nm,n'm'} = \int_{\text{gornjikrak}} F_{nm} F_{n'm'}^* dl + \int_{\text{donjikrak}} F'_{nm} F_{n'm'}^* dl'$$

$$b'_{n'm'} = E_i \left( \int_0^b F_{n'm'}^* dl - \int_0^b F'_{n'm'}^* dl' \right)$$

Elementi dužine gornjeg i donjeg kraka su :

$$dl = \sqrt{(rd\varphi)^2 + dr^2} \text{ i } dl' = \sqrt{(r'd\phi)^2 + dr'^2}$$

U oblasti koja obuhvata tačke  $r \rightarrow 0$ , gdje zadovoljavamo granični uslov  $B_n(kr)$  su Besselove funkcije prve vrste. U udaljenim tačkama potencijal, odnosno komponente polja izražavamo preko Henkelovih funkcija, kako bi bili zadovoljeni uslovi zračenja u dalekoj zoni. Tako su sada potencijali polja dati izrazom:

$$A_r = \sum_{m,n} \beta_{nm}^{(1)} H_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi} \quad (6)$$

$$F_r = \sum_{m,n} \beta_{nm}^{(2)} B_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi}$$

gdje su  $\beta_{nm}^{(1)}, \beta_{nm}^{(2)}$  nepoznati koeficijenti razvoja koje ćemo dobiti iz uslova jednakosti izraza (2) i (6) na sferi poluprečnika  $R = \max(r)$ :

$$\beta_{nm}^{(1)} = C_{nm} \frac{B_n(kR)}{H_n(kR)} \quad (7)$$

$$\beta_{nm}^{(2)} = D_{nm} \frac{B_n(kR)}{H_n(kR)}$$

U zoni zračenja ( $r \rightarrow \infty$ ) kada sve Henkelove funkcije postaju  $j^{(n+1)} e^{-jkr}$ , komponenta polja  $E_r \rightarrow 0$ , te postoje samo  $E_\varphi$  i  $E_\theta$  komponente.

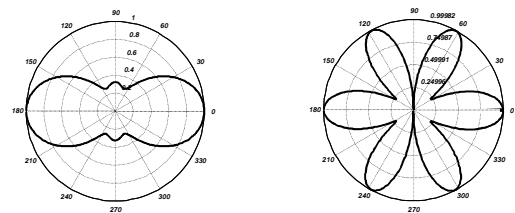
Karakteristična funkcija zračenja ima dvije komponente:

$$\hat{F}_\varphi(\theta, \varphi) = \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n j^{n+1} e^{jm\varphi} \left( \frac{km}{y \sin \theta} \beta_{nm}^{(1)} P_n^m(\cos \theta) + \beta_{nm}^{(2)} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right|$$

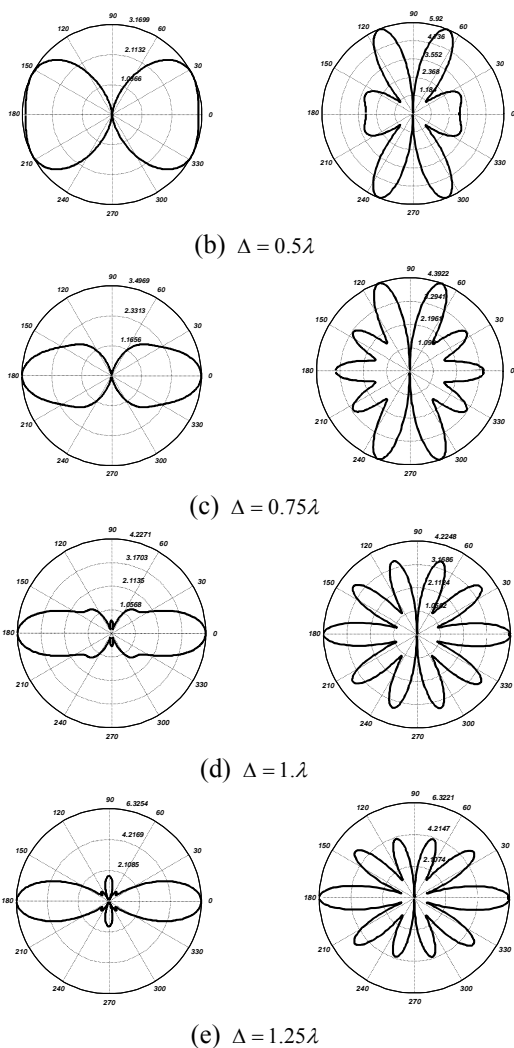
$$\hat{F}_\theta(\theta, \varphi) = \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n j^{n+1} e^{jm\varphi} \left( \frac{jk}{y} \beta_{nm}^{(1)} \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - \frac{jm}{\sin \theta} \beta_{nm}^{(2)} P_n^m(\cos \theta) \right) \right|$$

### 3. NUMERIČKI REZULTATI

Opisanim numeričkim postupkom analizirane su antene oblika simetrične Arhimedove spirale. Na slici.2 dati su dijagrami zračenja simetrične Arhimedove spirale za pet različitih konstanti spirale.



(a)  $\Delta = 0.25\lambda$



Slika 2 Dijagrami zračenja simetrične Arhimedove spirale, lijeva kolona  $E_\varphi$  komponenta, desna kolona  $E_\theta$  komponenta električnog polja.

U lijevoj koloni su dijagrami zračenja  $\varphi$  komponente električnog polja, a u desnoj koloni su dijagrami zračenja  $\theta$  komponente električnog polja. Faze komponenti električnog polja  $E_\varphi$  i  $E_\theta$  u pravcima  $\theta=0$  i  $\theta=\pi$ , gdje su im inteziteti zračenja jednaki, razlikuju se za  $\pm \frac{\pi}{2}$ , što znači da u tim pravcima imamo kružno polarizovan talas. U pravcu  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  imamo linijski polarizovan talas, a u ostalom prostoru eliptično polarizovan talas. Sve vrijednosti zračenja normalizovane su u odnosu na prvi slučaj, tj. za  $\Delta=0.25\lambda$  i dužinom kraka određenom uglom koji se mijenja u granicama od  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Sa slike 2. se uočava da funkcija zračenja  $\varphi$  komponente električnog polja ima skoro u svim slučajevima ravnije oblike sa malim, u nekim slučajevima čak zanemarljivim bočnim lepezama, što nije slučaj kod funkcije zračenja  $\theta$  komponente električnog polja, gdje su bočne lepeze veoma izražene. Svi dijagrami zračenja su crtani u ravni  $\varphi=0^\circ$ .

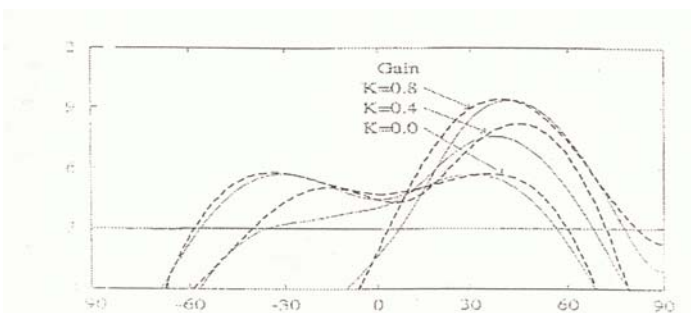
U tabeli 3. data su maksimalna pojačanja slučajeva sa slike 2.

Tabela 3.

$\Delta = 0.25\lambda$	4.05 dB
$\Delta = 0.5\lambda$	3.99dB
$\Delta = 0.75\lambda$	4.26dB
$\Delta = 1\lambda$	6.18dB
$\Delta = 1.25\lambda$	7.72dB

Iz table 3. vidimo da se pojačanje u svim analiziranim slučajevima pri nepromijenjenoj električnoj dužini kraka antene, kreće u granicama od 3.99 do 7.72 dB. Promjena konstante spirale donosi promjenu maksimalnog pojačanja u rasponu od oko  $\pm 2$  dB.

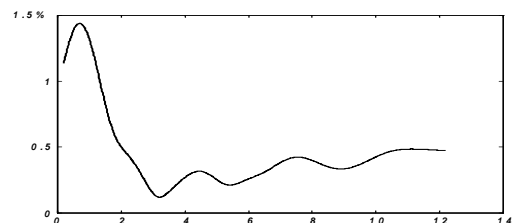
Na slici 3. dati su rezultati dobijeni opisanim postupkom, upoređeni sa rezultatima dobijenim teorijom izloženom u [1].



Slika 3. Uporedni grafik pojačanja

Sa datih dijagrama pojačanja simetrične i ekscentrične Arhimedove spirale tačno određene geometrije ( $a=0.00144m/rad$ ,  $90^\circ \leq \varphi \leq 1620^\circ$ ) uočava se veoma dobro slaganje rezultata u slučaju simetrične spirale.

U svim analiziranim slučajevima vrlo visoka tačnost prilikom zadovoljavanja graničnog uslova je postignuta već sa dvadeset članova u razvoju (2.). Na slici 4. data je greška koja se pravi prilikom zadovoljavanja graničnog uslova na gornjem i donjem kraku antene.



Slika 4. Greška koja se pravi pri zadovoljavanju graničnog uslova ( $\Delta=1.25\lambda$ , električna dužina kraka spirale određena uglom  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ )

#### 4. ZAKLJUČAK

Demonstrirana je mogućnost upotrebe metoda najmanje kvadratne greške u analizi polja simetrične Arhimedove spirale. Dobijeni su dijagrami zračenja simetrične spirale za pet različitih konstanti spirale. Takođe, računato je maksimalno pojačanje u svim analiziranim slučajevima.

Uočeno je, da sa povećanjem konstante spirale, pojačanje u pravcu maksimalnog zračenja raste. Dobijeni dijagrami pojačanja upoređeni su sa rezultatima iz [1]. Veoma dobro zadovoljenje graničnog uslova na svim djelovima antene postignuto je sa dvadeset članova razvoja.

Na osnovu izloženoga metod se pokazao vrlo tačnim i relativno jednostavnim za korišćenje, što ga preporučuje za analizu antena još složenijeg oblika.

## LITERATURA

- [1] R.T.Gloutak, Jr. and N.G.Alexopoulos,"Two-Arm Eccentric Spiral Antenna", IEEE Trans. on Antennas and Propag.,vol.45, no.4, april 1997.
- [2] S.K.Khamas and G.G.Cook,"Moment-Method Analysis of Printed Wire Spirals Using Curved Piecewise Sinusoidal Subdomain Basis and Testing Functions",IEEE Trans. on Antennas and Propag.,vol.45, no.6, jun 1997.
- [3] H.Nakano, Y.Shinma and J.Yamauchi,"A Monofilar Spiral Antenna and Its Array Above a Ground Plane-Formation of a Circularly Polarized Tilted Fan Beam", IEEE Trans. on Antennas and Propag.,vol.45, no.10, october 1997.
- [4] O.M.Ramahi,"Near-and Far-Field Calculations in FDTD Simulations Using Kirchoff Surface Integral Representation", IEEE Trans. on Antennas and Propag.,vol.45, no.5, may 1997.
- [5] A.Shlivinski, E.Heyman and R.Kastner,"Antenna Characterization in the Time Domain", IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol.45, no.7, july 1997.
- [6] O.M.Ramahi," The Complementary Operators Method in FDTD Simulations",IEEE Trans. on Antennas and Propag. magazine, vol.39, no. 6, december1997.
- [7] L.W.Li, M.S.Leong, P.S.Kooi and T.S.Yeo,"Exact Solutions of Electromagnetic Fields in Both Near and Far Zones Radiated by Thin Circular-Loop Antennas: A General Representation", IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol.45, no.12, december 1997.
- [8] L.J.Stanković, S.Jovičević," Modified least squares method with application to diffraction and eigenvalue problems", IEEE Proceedings, vol.135, Pt.H, no.5, october 1988.
- [9] L.J.Stanković, S.Jovičević,"A round-ridge waveguide", Ann.Telecommun., 43,  $n^{\circ}$  9-10, 1988.
- [10] L.J.Stanković, S.Jovičević," Boundary Condition Expansion of Basis Functions Method Implemented by Fast Fourier Transform Algorithms", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol.38, no.3, march 1990.
- [11] A.Jovanović, S.Jovičević,"A general Solution of the Thin Circular Loop Radiation", Electromagnetics, Vol. 23, no.1, january 2003.
- [12] S.Jovičević, A.Jovanović,"The analysis of the biconical antenna by the Least-Squares Boundary Residual Method", Int. J. Electron. Commun. (AEU) 57 (2003), no. 6, 415-419.
- [13] A.Jovanović, S.Jovičević,"Analiza žičanih antena metodom najmanjih kvadrata", XLII ETRAN sveska II, Vrnjačka Banja 1998.
- [14] R.F.Harrington,Time-Harmonic Electromagnetic Fields, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1961.
- [15] L.W.Li, M.S.Leong, P.S.Kooi, T.S.Yeo,"Exact Solutions of Electromagnetic Fields in Both Near and Far Zones Radiated by Thin Circular-Loop Antennas: A General Representation", IEEE Trans. Antennas and Propag., vol. 45, no. 12, dec.1997.

**Abstract:** This paper demonstrates the applicability of the Least square boundary method (LSBM) in the symmetric Archimedean spiral antenna analysis. It appiered that the boundary condition is highly fulfilled by a small number of eigenfunctions, which makes the obtained results very reliable.The radiation field is found in far zone.

## FIELD ANALYSIS OF THE SYMMETRIC ARCHIMEDEAN SPIRAL ANTENNA BY THE LEAST SQUARE BOUNDARY METHOD

Ana Jovanović, Svetozar Jovičević