

## TRODIMENZIONALNI MATRIČNI MODEL METALNIH PRSTENOVA I DISKOVA

Dragan Mančić, Milan Radmanović, Zoran Petrušić, *Elektronski fakultet u Nišu*

**Sadržaj** – U ovom radu prikazan je novi trodimenzionalni matricni model metalnih prstenova i diskova konačne dužine, sa različitim otvorom i dužinom. Pomoću ovog modela, koji opisuje i debljinske i radijalne rezonantne modove, kao i njihovu međusobnu spregu, mehanička impedansa uzorka može biti lako izračunata. Zavisnosti rezonantne frekvencije i dužine su prikazane za prstenove i diskove od različitog materijala i za različite odabrane dimenzije. Takođe, upoređeni su izračunati i eksperimentalni rezultati.

### 1. UVOD

Metalni prstenovi i diskovi, pored piezokeramičkih prstenova i metalnog zavrtnja, predstavljaju najvažnije sastavne delove snažnih ultrazvučnih sendvič pretvarača. Za precizno projektovanje ovakvih složenih rezonantnih struktura neophodno je poznavanje sopstvenih rezonantnih frekvencija svih navedenih sastavnih delova ultrazvučnih pretvarača, a posebno metalnih nastavaka u obliku prstenova i diskova [1], [2].

U dosadašnjoj ultrazvučnoj praksi najčešće su se primenjivali numerički metodi za određivanje rezonantnih frekvencija ovakvih struktura. Postupci izračunavanja primenom numeričkih metoda su veoma spori, i uvek se težilo pronalazaženju jednostavnijeg, ali dovoljno tačnog, metoda za određivanje rezonantnih frekvencija ovakvih metalnih delova pretvarača [3]. Ti metodi podrazumevali su uvek uvođenje dodatnih aproksimacija u rešavanju trodimenzionalnih problema linearne elastičnosti, tako da su se pomenuti metodi uvek vezivali za metalne uzorke zanemarljivog prečnika u odnosu na njihovu dužinu, odnosno uzorke zanemarljive debljine u poređenju sa njihovim prečnikom. Pri tome se retko razmatrao uticaj veličine unutrašnjeg otvora prstena na njegove rezonantne frekventne karakteristike.

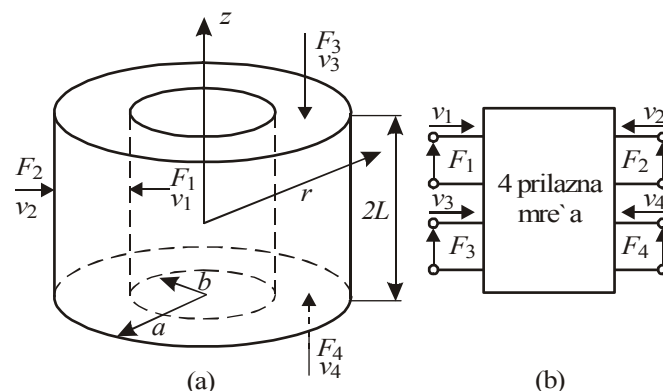
I ovaj rad predstavlja pokušaj da se dođe do zadovoljavajućeg modela metalnih prstenova i diskova, ali za uzorke koji nemaju pojedine zanemarljive dimenzije, odnosno uzorke kod kojih se dimenzije u debljinskom i radijalnom pravcu mogu međusobno uporediti. U radu je prikazan novi trodimenzionalni model metalnih prstenova i diskova konačne dužine, za različite vrednosti unutrašnjeg otvora i dužine (debljine). Metalni prstenovi i diskovi, koji su opterećeni na svim svojim graničnim površinama, modelirani su primenom trodimenzionalnog matricnog modela opterećenih piezokeramičkih prstenova i diskova, koji su neki od autora ranije predložili [4]. Pomoću ovog modela, koji opisuje i debljinske i radijalne rezonante modove uzoraka, kao i njihovu međusobnu spregu, mehanička impedansa metalnog uzorka (nastavka) može biti lako izračunata. Predloženi model je pogodan za analizu rezonantnih modova uzoraka u širokom frekventnom opsegu. Krive zavisnosti između rezonantne frekvencije i dužine prikazane su za prstenove i diskove od različitog materijala, kao i za različite odabrane dimenzije. U poređenju sa numeričkim metodima projektovanje je značajno ubrzano.

Takođe, prikazano je poređenje između izračunatih i eksperimentalnih rezultata.

### 2. ANALITIČKI MODEL

Kao što je u uvodu napomenuto, predloženi model odnosi se na metalne prstenove koji predstavljaju sastavne delove ultrazvučnih sendvič pretvarača, mada se može koristiti u projektovanju metalnih rezonatora oblika prstena ili diska i u drugim oblastima njihove primene. Analizi ultrazvučnog oscilovanja metalnih prstenova u literaturi nije posvećeno dovoljno prostora, već su uglavnom analizirani puni metalni cilindri. Razlog za to je bio taj što su analizirani ultrazvučni pretvarači za niže rezonantne frekvencije, sa metalnim nastavcima velikih dužina, kod kojih pri analizi modova longitudinalnih oscilacija unutrašnji prečnik cilindra sa otvorom ne igra presudnu ulogu pri određivanju rezonantne frekvencije. Međutim, kod analize oscilovanja ultrazvučnih pretvarača za veće radne rezonantne frekvencije, sa kratkim metalnim prstenovima, a koji su predmet analize u ovom radu, oblik nastavka ima veliki uticaj na osnovnu rezonantnu frekvenciju. Razlike u frekventnom spektru za metalne diskove i prstenove istog spoljašnjeg prečnika i debljine, odnosno uticaj unutrašnjeg prečnika kod prstenova, biće ilustrovane primenom predloženog matricnog modela metalnih prstenova konačne dužine. Ovaj model je opšti, jer se zanemarivanjem unutrašnjeg otvora prstena dobija model metalnog diska, odnosno punog cilindra, konačne dužine.

Dimenzije prstenova i cilindrični koordinatni sistem sa početkom u centru prstena, mogu se u opštem slučaju za razmatrane metalne prstenove definisati kao na slici 1(a). Svaka od četiri granične površine prstena je opterećena akustičkom impedansom  $Z_i$ , dok su  $v_i$  i  $F_i$  brzine i sile na tim površinama  $S_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), pri čemu važi da je  $F_i = -Z_i v_i$ . Ovakvi metalni prstenovi, sa spoljašnjim poluprečnikom  $a$ , unutrašnjim poluprečnikom  $b$  i debljinom (dužinom)  $2L$ , najčešće u snažnim ultrazvučnim pretvaračima služe kao reflektorski i emitorski nastavak. Pretpostavlja se da je centralna ravan prstena locirana pri  $z=0$ , tako da njegove krajnje kružno-prstenaste površine leže na  $z=\pm L$ .



Sl. 1. Opterećeni metalni prsten: (a) geometrija i dimenzije  
(b) metalni prsten kao mreža sa 4 pristupa

Trodimenzionalni matricni model metalnih prstenova i diskova realizovan je na osnovu prethodno realizovanog trodimenzionalnog modela piezokeramičkih prstenova i diskova, koji je prikazan u literaturi [4].

Pomoću ovog modela, metalni prsten se u elektromehaničkom kolu modelira mrežom sa 4 pristupa (slika 1b), pri čemu je već navedeno da su  $F_i$  i  $v_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) sile i brzine na spoljašnjim graničnim (konturnim) površinama prstena. Model je dobijen jednostavno, na osnovu izvedenog modela piezokeramičkih prstenova, prostim zanemarivanjem piezoelektričnih konstanti  $h_{31}$  i  $h_{33}$  u linearnom sistemu jednačina, koji primenom matrice dimenzija  $5 \times 5$  opisuje spoljašnje ponašanje piezokeramičkog prstena. U tom sistemu jednačina povezane su električne veličine (napon  $V$  i struja  $I$ ) sa mehaničkim veličinama (sile  $F_i$  i brzine  $v_i$ ) u frekventnom domenu, a detaljno izvođenje ovih izraza prikazano je u literaturi [5]. Pored toga, navedeni izrazi su pojednostavljeni tako što su, zbog izotropnosti materijala, usvojene sledeće relacije za konstante materijala:

$$c_{11} = c_{33} = \lambda_m + 2\mu, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda_m, \quad (1)$$

pri čemu su  $\lambda_m$  i  $\mu$  Lameovi koeficijenti, a  $c_{ij}$  su konstante elastične deformacije.

Sa ovim pretpostavkama, linearni sistem jednačina, koji primenom matrice dimenzija  $4 \times 4$  opisuje spoljašnje ponašanje metalnog prstena i povezuje mehaničke veličine na njegovim spoljašnjim površinama, je jednostavniji, odnosno sistem koji opisuje ponašanje piezokeramičkog prstena svodi se na sledeći sistem jednačina:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{23} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} & z_{34} \\ z_{13} & z_{23} & z_{34} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

pri čemu su elementi matrice impedansi definisani pomoću sledećih izraza:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{-4\pi L}{j\omega} \left\{ c_{12} - c_{11} \left[ 1 - kb \left( A_1 J_0(kb) + B_1 Y_0(kb) \right) \right] \right\}, \\ z_{22} &= \frac{4\pi L}{j\omega} \left\{ c_{12} - c_{11} \left[ 1 + ka \left( A_2 J_0(ka) + B_2 Y_0(ka) \right) \right] \right\}, \\ z_{12} &= \frac{-4\pi k b L c_{11}}{j\omega} \left[ A_2 J_0(kb) + B_2 Y_0(kb) \right], \\ z_{21} &= \frac{-4\pi k a L c_{11}}{j\omega} \left[ A_1 J_0(ka) + B_1 Y_0(ka) \right], \\ z_{13} &= \frac{2\pi b c_{12}}{j\omega}, \quad z_{23} = \frac{2\pi a c_{12}}{j\omega}, \\ z_{33} &= \frac{c_{11} k \pi (a^2 - b^2)}{j\omega \tan(2kL)}, \\ z_{34} &= \frac{c_{11} k \pi (a^2 - b^2)}{j\omega \sin(2kL)}. \end{aligned} \quad (3)$$

U prethodnim izrazima  $J_i$  i  $Y_i$  su Beselove funkcije reda  $i$ , prve i druge vrste, respektivno,  $\omega$  je kružna frekvencija, a  $k = \omega v = 2\pi/\lambda$  je osni talasni broj ( $v$  je fazna brzina talasa, a  $\lambda$  talasna dužina).

Koeficijenti  $A_1, A_2, B_1$  i  $B_2$  određeni su izrazima:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Y_1(ka)}{J_1(kb)Y_1(ka) - J_1(ka)Y_1(kb)}, \\ A_2 &= \frac{Y_1(kb)}{J_1(kb)Y_1(ka) - J_1(ka)Y_1(kb)}, \\ B_1 &= \frac{J_1(ka)}{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)}, \\ B_2 &= \frac{J_1(kb)}{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)}. \end{aligned} \quad (4)$$

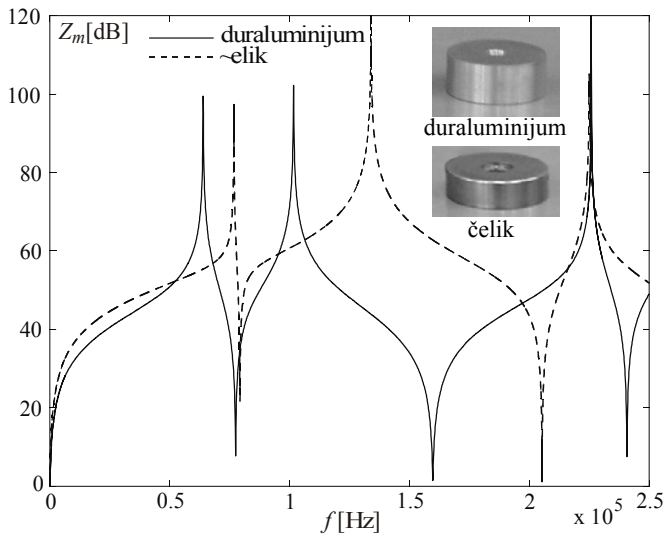
### 3. NUMERIČKI REZULTATI

U ultrazvučnim pretvaračima ovakav metalni prsten je preko jedne svoje kružno-prstenaste (ravne) površine povezan (spojen) sa piezokeramičkim prstenom, pa je zbog toga bitna ulazna mehanička impedansa metalnog prstena, kojom je piezokeramički prsten opterećen. Uvođenjem relacija između sila i brzina na spoljašnjim površinama preko akustičkih impedansi ( $F_i = Z_i v_i$ ,  $i=1,2,3,4$ ), i njihovom zamenom u sistem jednačina (2), može se odrediti bilo koja mehanička impedansa. Na slici 2 prikazane su ulazne mehaničke impedanse  $Z_m = F_i/v_i$  za prsten od duraluminijuma sa dimenzijama:  $2a=40\text{mm}$ ,  $2b=8\text{mm}$ ,  $2L=18\text{mm}$ , kao i čeličnog prstena istog spoljašnjeg i unutrašnjeg prečnika, debljine  $2L=11\text{mm}$ . Metalni prstenovi ovih dimenzija su sastavni delovi ultrazvučnog pretvarača sa radnom rezonantnom frekvencijom od 40kHz.

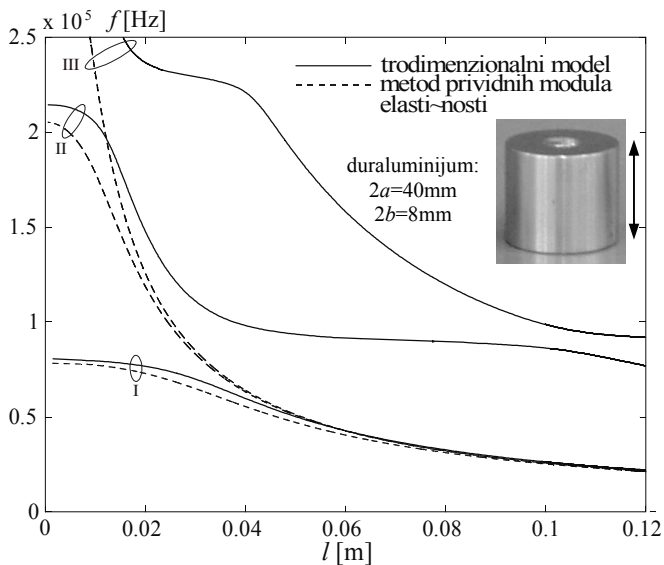
Za projektovanje i optimizaciju u oblasti snažnog ultrazvuka, značajnija od prikazane je zavisnost rezonantne frekvencije od dimenzija metalnih prstenova, koju je takođe moguće odrediti primenom predloženog modela. Na slikama 3 i 4 prikazane su tri najniže grane rezonantnog frekventnog spektra u funkciji dužine  $l=2L$ , za slučaj prstenova od duraluminijuma i čelika, sa odnosom poluprečnika  $b/a=8/40$ . Prikazane karakteristike su veoma slične, iako se fizički parametri navedenih metala dosta razlikuju. Da bi se prikazala poboljšanja dobijena navedenim pristupom u modeliranju, na slici 3 je prikazan i frekventni spektar dobijen primenom Morijevog metoda prividnih modula elastičnosti [3]. Očigledno je da su prvi rezonantni modovi za oba modela skoro identični, što je i bilo logično očekivati, jer se metod prividnih modula elastičnosti svodi na određivanje prvog rezonantnog moda. Međutim, viši rezonantni modovi dobijeni predloženim matricnim modelom predviđaju spregu modova, tako da rezonantne krive nisu uniformne kao u slučaju primene metoda prividnih modula elastičnosti, što je bliže realnom slučaju. Kao što je poznato, metod prividnih modula elastičnosti predstavlja modifikaciju jednodimenzionalne teorije voda [6], tako da bi se njegova primena u ekvivalentnim elektromehaničkim kolima svodila na mrežu sa dva pristupa, sa veštački modifikovanim parametrima voda. Na taj način se ne mogu ostvariti analize oscilovanja u radialnom pravcu, koje omogućava predloženi trodimenzionalni matricni model, posebno u složenim uređajima sa više redno-paralelnih veza mehaničkih pristupa, koji postoje u oblasti snažnog ultrazvuka.

Na slici 4 su istovremeno prikazani frekventni spektri za čelični prsten i čelični disk istog spoljašnjeg prečnika, dobijeni predloženim trodimenzionalnim matricnim modelom. Time je potvrđena konstatacija dobijena primenom

numeričkog metoda [7], da se razlike u frekventnim spektrima povećavaju sa povećanjem prečnika unutrašnjeg otvora prstena, što u krajnjem slučaju izaziva promene rezonantnih frekvencija modova ultrazvučnih sendvič pretvarača.



Sl. 2. Mehanička impedansa slobodnih metalnih prstenova:  
(a) duraluminijum:  $2a=40\text{mm}$ ,  $2b=8\text{mm}$ ,  $2L=18\text{mm}$ ,  
(b) čelik:  $2a=40\text{mm}$ ,  $2b=8\text{mm}$ ,  $2L=11\text{mm}$ .

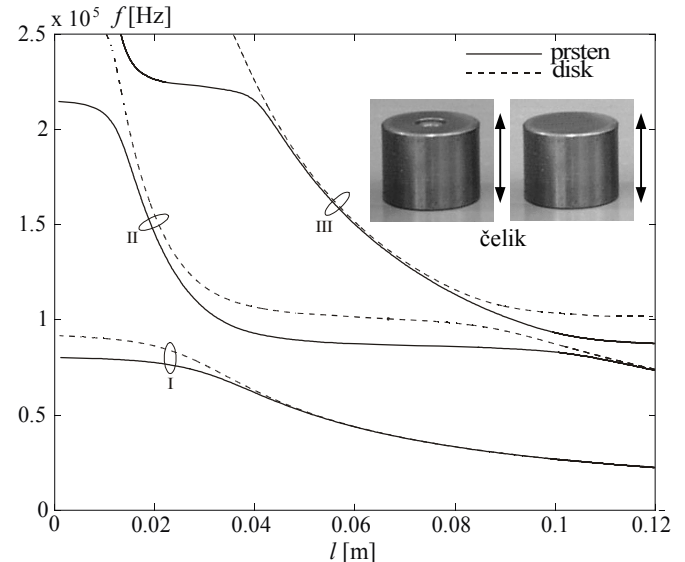


Sl. 3. Frekventni spektar prstena od duraluminijuma sa odnosom  $b/a=8/40$  u funkciji njegove dužine: predloženi matricni model i Morijev model [3]

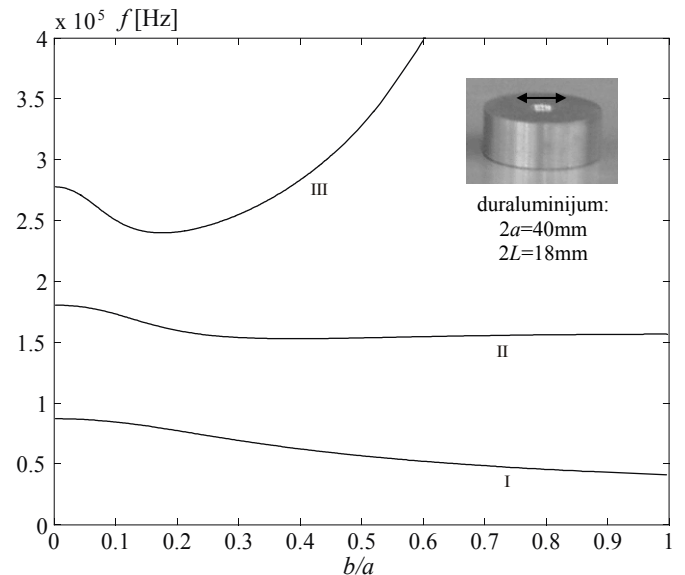
Ovaj zaključak se može još bolje potvrditi na osnovu slike 5. Naime, pored pomenute zavisnosti rezonantne frekvencije od dužine prstena, bitna je i zavisnost rezonantne frekvencije od odnosa unutrašnjeg i spoljašnjeg poluprečnika prstena. Na slici 5 prikazana je navedena zavisnost za slučaj prstena od duraluminijuma debljine 18mm. Na prikazanoj slici, frekvencije najnižeg rezonantnog moda opadaju sa porastom  $b/a$ , frekvencije drugog rezonantnog moda ne zavise mnogo od dimenzije unutrašnjeg otvora prstena, dok frekvencije trećeg i viših rezonantnih modova rastu sa porastom odnosa  $b/a$ .

Kao i u slučaju piezokeramičkog prstena [5], i ovde se može posmatrati uticaj pojedinih mehaničkih opterećenja na različitim površinama metalnog prstena na ulaznu mehaničku

impedansu i rezonantni frekventni spektar. Međutim, ovakva analiza za izolovani metalni prsten nije previše zanimljiva. Ova analiza može biti izvršena za kompletni ultrazvučni sendvič pretvarač, kada je mnogo interesantniji uticaj mehaničkog opterećenja metalnih prstenova, jer su oni tada u mehaničkom kontaktu sa ostalim sastavnim delovima ultrazvučnog sendvič pretvarača. Takođe, kao i kod piezokeramičkih prstenova, i ovde se za različite rezonantne modove mogu odrediti mehanički pomeraji u radialnom i debljinskom pravcu  $u_r$  i  $u_z$ , za prstenove različitih dimenzija i od različitih materijala.



Sl. 4. Frekventni spektar za čelični uzorak u funkciji njegove dužine i dimenzija otvora, dobijen predloženim modelom za slučaj prstena  $b/a=8/40$  i diska  $b/a=0$



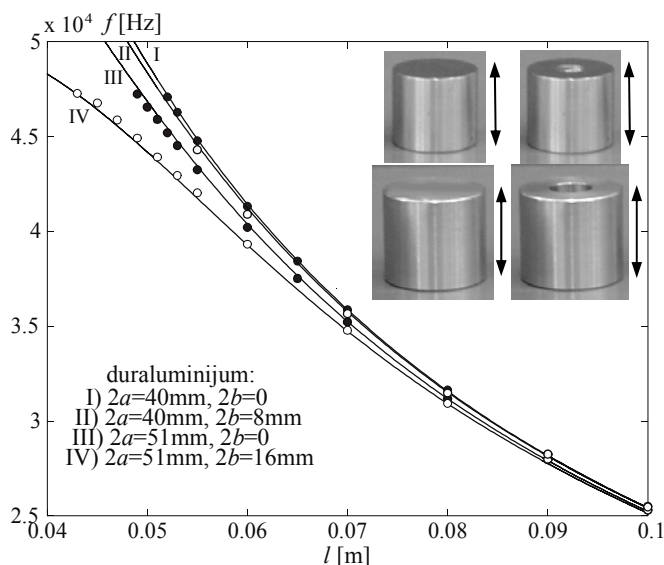
Sl. 5. Frekventni spektar prstena od duraluminijuma debljine  $l=2L=18\text{mm}$  u funkciji odnosa  $b/a$

#### 4. POREĐENJE EKSPERIMENTALNIH I NUMERIČKIH REZULTATA

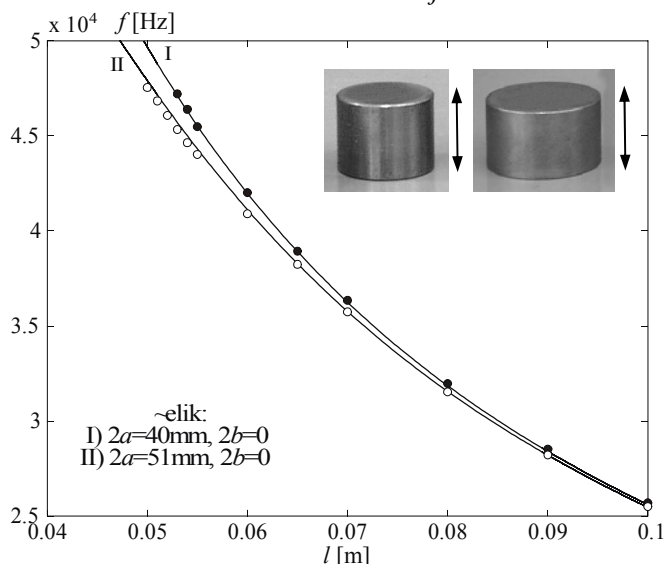
Najzad, na slikama 6 i 7 prikazani su samo frekventni spektri najnižih (prvih) rezonantnih modova različitih prstenova i punih cilindara od duraluminijuma i čelika, respektivno, primenom predloženog trodimenzionalnog matricnog modela. Ovi frekventni spektri rezonantnih

modova upoređeni su sa eksperimentalnim rezonantnim frekvencijama, dobijenim pomoću vibracione platforme firme Herfurth. Parametri materijala, koji su korišćeni u modeliranju (simulaciji) metalnih prstenova, prikazani su u literaturi [7].

Očigledno, predloženi trodimenzionalni matrični model je u mogućnosti da predviđa frekventne spektre metalnih prstenova bilo kojih dimenzija, i to sa tačnošću koja nije manja nego u slučaju primene numeričkog metoda [7]. Dakle, zadržana je velika tačnost u određivanju rezonantnih frekvencija, a još je bitnije od toga da je dobijena mogućnost određivanja raznih prenosnih funkcija opterećenog metalnog prstena, kao i njegovih komponentalnih pomeraja. Dobijanje dobrih rezultata u slučaju analize neopterećenih metalnih prstenova je opravdanje za primenu ovog modela u slučaju opterećenih prstenova, pri modeliranju kompletnog ultrazvučnog sendvič pretvarača.



Sl.6. Frekventni spektri prvog rezonantnog moda različitih uzoraka od duraluminijuma



Sl.7. Frekventni spektri prvog rezonantnog moda različitih uzoraka od čelika

## 5. ZAKLJUČAK

Modeliranje snažnih ultrazvučnih pretvarača uslovljeno je razvojem pogodnih modela piezokeramičkih prstenova i diskova i, uporedo sa tim, razvojem modela metalnih

sastavnih delova pretvarača istog ili sličnog oblika. Ovaj rad predstavlja jedan nov pristup u modeliranju metalnih sastavnih delova pretvarača u obliku prstena, diska ili cilindra, koji je zasnovan na aproksimativnom trodimenzionalnom matričnom modelu istih.

Poređenjem frekventnog spektra dobijenog primenom opisanog trodimenzionalnog matričnog modela metalnih prstenova i diskova, sa eksperimentalnim merenjima rezonantnih frekvencija različitih prstenova i diskova od duraluminijuma i čelika, dobijenih pomoću vibracione platforme, može se uočiti da je ostvarena velika tačnost u predviđanju rezonantnih modova u svim slučajevima. Dobijene zavisnosti rezonantne frekvencije od dimenzija nastavaka upoređene su i sa analognim rezultatima dobijenim metodom prividnih modula elastičnosti, koji je do sada predstavljao najbolju modifikaciju jednodimenzionalnih modela metalnih nastavaka. Pri tome je prikazan frekventni opseg koji je najčešće korišćen u praktičnim primenama u oblasti snažnog ultrazvuka.

## LITERATURA

- [1] E.A.Neppiras, "The pre-stressed piezoelectric sandwich transducer", *Ultrasonic International Conference Proceedings*, 1973, pp. 295-302.
- [2] D.Mančić, M.Radmanović, "Projektovanje snažnih ultrazvučnih sendvič pretvarača", *Elektronika*, vol. 1, no 1, pp. 66-69, 1997.
- [3] D.Mančić, M.Radmanović, "Projektovanje sendvič pretvarača pomoću prividnih modula elastičnosti", *XVIII Jugoslovenska konferencija Buka i vibracije*, Niš, 2002, pp. 2.1-2.4.
- [4] D.Mančić, M.Radmanović, "Piezoceramic ring loaded on each face: a three-dimensional approach", *Journal of Technical Acoustics*, vol. 2, pp. 1.1-1.7, 2002.
- [5] M.Radmanović, D.Mančić, "Trodimenzionalni elektromehanički model piezokeramičkih prstenova i diskova", *XLVI konferencija za ETRAN*, 2002, pp. 43-46.
- [6] D.Mančić, M.Radmanović, "Generalni model piezoelektričnog ultrazvučnog sendvič pretvarača", *XLII konferencija za ETRAN*, 1998, pp. 112-115.
- [7] D.Mančić, M.Radmanović, "A numerical approach to analysis of axisymmetric rings", *Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, vol.4, no 16, pp. 141-156, 2004.

**Abstract** – In this paper a new three-dimensional matrix model of the finite metal rings and disks of various hole and length is described. With this model, which describes both the thickness and the radial resonant modes, and the coupling between them, mechanical impedance of the sample can be easily computed. Resonance frequency-length curves are given for rings and disks with various materials and for different selected dimensions. Also, the computed and experimental results are compared.

## THREE-DIMENSIONAL MATRIX MODEL OF THE METAL RINGS AND DISKS

Dragan Mančić, Milan Radmanović, Zoran Petrušić