Zbornik radova 49. Konferencije za ETRAN, Budva, 5-10. juna 2005, tom I
Proc. 49th ETRAN Conference, Budva, June 5-10, 2005, Vol. I

# INDIREKTNA PRIMJENA TRANSFORMACIONIH POLINOMA ZA DISKRETIZACIJU FRAKCIONIH INTEGRATORA (DIFERENCIJATORA)

Tomislav B. Šekara, *Elektrotehnički fakultet u Beogradu*

***Sadržaj*** - *U radu je data originalna metoda za diskretizaciju frakcionih integratora / diferencijatora (I/D). Takođe je izvršena adekvatna komparativna analiza kroz odgovarajuće primjere sa nekoliko drugih poznatih metoda za diskretizaciju. Pokazano je da primjena ove metode omogućava modularni pristup, kao i smanjenje odgovarajuće greške koja se pravi pri diskretizaciji u odnosu na druge aproksimativne metode.*

## 1. UVOD

Projektovanje klasičnih i/ili frakcionih zakona upravljanja sa integralnim i diferencijalnim dejstvom često zahtijeva formiranje diskretnog modela ili diskretnog ekvivalenta korišćenjem metoda invarijantnog odziva na impulsno dejstvo ili odskočno dejstvo i nizom drugih aproksimativnih metoda. Osnovni problem koji se moraju riješiti u procesu diskretizacije ovakvih i sličnih zakona upravljanja se odnose na zadržavanje fundamentalnih osobina kao što su: jednakost pojačanja u stacionarnom stanju, vremenskog odziva na tipično dejstvo, frekvencijskog odziva itd. Kod diskretizacije kontinualnih sistema, u koje spadaju u opštem slučaju integralno i diferencijalno dejstvo, može da se iskoristi poznato preslikavanje $s$-domena u $z$-domen kompleksne ravni

$$z = e^{sT} \tag{1}$$

gdje je $T$-period odabiranja. Transformacija (1) preslikava lijevu poluravan $s$-ravni u unutrašnjost jediničnog kruga $z$-ravni. Ovo znači da je sačuvana stabilnost diskretnog sistema ako se svi polovi diskretnog sistema nalaze u jediničnom krugu. Jedan od osnovnih ciljeva diskretizacije je potreba za praktičnom realizacijom frakcionih zakona upravljanja ili nekih drugih frakcionih sistema, sa težnjom da digitalni ekvivalent bude što je moguće vjerniji frakcionom kontinualnom sistemu u opštem smislu.

Rad se sastoji od dva poglavlja, uvoda, zaključka i literature. U drugom poglavlju dat je kratak osvrt na osnovne metode diskretizacije klasičnih kontinualnih sistema odnosno klasičnih zakona upravljanja i njihovih diskretnih ekvivalenata. Treće poglavlje prikazuje originalnu metodu za diskretizaciju kontinualnih frakcionih I/D. Takođe je izvršena komparativna analiza odskočnih odziva digitalnih modela frakcionih I/D sa odskočnim odzivom frakcionog I/D dobijenim analitičkim putem.

## 2. KRATAK OSVRT NA OSNOVNE METODE DISKRETIZACIJE

Osnovna definicija funkcije diskretnog prenosa je

$$G(z) = Z\left[g(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} = Z\left\{L^{-1}\left[G(s)\right]\right\} \tag{2}$$

gdje su $Z$ i $L^{-1}$ operatori koji predstavljaju $Z$-transformaciju i inverznu Laplasovu transformaciju, respektivno. Funkcija diskretnog prenosa sistema sa kolom zadrške nultog reda $H(z)$ se može pisati:

$$H(z) = (1-z^{-1})\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{z}{z-e^{pT}}\frac{G(p)}{p}dp \;, e^{\sigma T} < |z| \tag{3}$$

gdje je $T$ period diskretizacije, a $\sigma$ realan broj takav da svi polovi funkcije $G(s)/s$ imaju realne dijelove manje od $\sigma$. Primjenom računa ostataka na izraz (3), uz elementarne matematičke operacije i $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$, može se pisati:

$$H(z) = (1-z^{-1})\sum_{k} \mathrm{Res}\left\{\frac{z}{z-e^{pT}}\frac{G(p)}{p}\right\}_{p=p_k} \tag{4}$$

Funkcija prenosa definisana sa (3) ili (4), se može dobiti na osnovu izraza

$$H(z) = (1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\} \tag{5}$$

Napomenimo da se do $G(z)$ iz (2) može formalno doći i zamjenom $s = \frac{1}{T}\ln z$, tj.

$$G(z) = G^{*}(s)\Big|_{s=(\ln z)/T} \tag{6}$$

gdje je $G^{*}(s) = L\left[g(kT)\right]$. Prethodno opisane transformacije (2), (4) i (5) su direktne i omogućuju transformaciju funkcije prenosa $G(s)$ kontinualnog sistema u diskretnu funkciju prenosa [1,2]. Napomenimo da pored direktnih metoda postoje i indirektne metode transformacije, koje se zasnivaju na nekoj od aproksimacija

$$s = f(z)\,, \tag{7}$$

dobijene na bazi relacije (1), gdje je $f(\cdot)$ odgovarajuće funkcionalno preslikavanje. Tako je na primjer definisana $\alpha$-aproksimacija [3]:

$$s = f_{\alpha 1}(z) = \frac{1}{T}\frac{z-1}{1+\alpha(z-1)}\,, \alpha \in [0,1] \tag{8}$$

| $\alpha$ | $f_{\alpha 1}(z)$ | Naziv aproksimacije |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{z-1}{T}$ | Ojlerova aproksimacija prve vrste |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ | Tustinova aproksimacija |
| 1 | $\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}$ | Ojlerova aproksimacija druge vrste |
| $\alpha$ | $\frac{1}{T}\frac{z-1}{1+\alpha(z-1)}$ | Frakciona aproksimacija ($\alpha$-aproksimacija) prvog reda |

Tabela 1. *Neke osnovne aproksimacije diferencijalnog (integralnog) dejstva*

U radu [4] je pokazano da kada je $G(s)=1/s^n$, tada je

$$H^J(z)=\frac{T^n}{n!}\frac{B_n(z)}{(z-1)^n} \tag{9}$$

gdje su $B_n(z)$ dati za nekoliko vrijednosti $n\in N$.

$$B_1(z)=1$$
$$B_2(z)=z+1$$
$$B_3(z)=z^2+4z+1$$
$$B_4(z)=z^3+11z^2+11z+1$$
$$B_5(z)=z^4+26z^3+66z^2+26z+1$$
$$B_6(z)=z^5+57z^4+302z^3+302z^2+57z+1$$
...............................................................
$$B_n(z)=b_1^n z^{n-1}+b_2^n z^{n-2}+\cdots+b_n^n$$

Pri tome su $b_k^n=kb_k^{n-1}+(n-k+1)b_{k-1}^{n-1}$, $k=\overline{2,n-1}$ i $b_1^n=b_n^n=1$. Može se, takođe, ustanoviti da $B_2(z)$ i $B_3(z)$ imaju jednu nestabilnu nulu, $B_4(z)$ i $B_5(z)$ dvije nestabilne nule a $B_6(z)$ tri nestabilne nule, itd. Ostali detalji o nulama u diskretnoj funkciji prenosa i Džurijevim (Jury) polinomima $B_n(z)$ mogu se naći u datoj literaturi [4,5].

Korišćenjem aproksimacionih polinoma za diskretizaciju kontinualnih sistema [6,7] dobijena je relacija

$$f_n(z)=\frac{T^n}{(n-1)!}\frac{z\,B_{n-1}(z)}{(z-1)^n}+T^n a_0^n\,,\quad n\in N\,,B_0(z)=1 \tag{10}$$

Vrijednosti nultog člana $a_0^n$ aproksimacione funkcije $f_n(z)$ se može dobiti u funkciji odgovarajuće sume prethodnih nultih članova u nizu, u obliku relacije

$$a_0^n=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_0^{n-k}}{(k+1)!}\,,\ n\ge 2\,,\ a_0^0=1\,,a_0^1=-\frac{1}{2} \tag{11}$$

Pokazuje se da su svi nulti članovi na neparnim mjestima niza aproksimacione funkcije $f_n(z)$ jednaki nuli ($a_0^{2l+1}=0$) za $l\in N$, izuzev prvog nultog člana $a_0^1=-0.5$. Tako, na primjer, za $n\le 4$ aproksimacione funkcije definisane relacijom (10) su prikazane u tabeli 2.

| $n$ | $s^{-n}$ | $f_n(z)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{s}$ | $\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$ |
| 2 | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{T^2}{12}\frac{z^2+10z+1}{(z-1)^2}$ |
| 3 | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{T^3}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 4 | $\frac{1}{s^4}$ | $-\frac{T^4}{720}\frac{z^4-124z^3-474z^2-124z+1}{(z-1)^4}$ |

Tabela 2. *Aproksimacione funkcije reda* $n\le 4$

## 3. NOVE METODE DISKRETIZACIJE FRAKCIONIH I/D

Polazeći od aproksimacionih relacija datih u literaturi [8]

$$s^{-r}\approx I_r(s)=\frac{1}{D_r(s)}=\frac{1}{(1+s/p_{\mathrm{T}})^r}\approx\frac{\prod_{k=0}^{N-1}\left(1+\frac{s}{z_k}\right)}{\prod_{k=0}^{N}\left(1+\frac{s}{p_k}\right)}\,, \tag{12}$$

gdje su:

$$N=1+\mathrm{integer}\left(\frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(a\,b)}\right),\quad p_0=p_{\mathrm{T}}10^{(y/20r)},$$

$$a=10^{[y/10(1-r)]}\,,\quad b=10^{y/10r}\,,\ r\in(0,1)\,,$$

tako da amplitudska karakteristika date aproksimacije može da ima unaprijed zadato maksimalno slabljenje, $y$, iskazano u dB za interval posmatrane frekvencije $\omega\in(p_{\mathrm{T}},\omega_{\max})$. Ako je $y=2\,\mathrm{dB}$, $p_{\mathrm{T}}=0{,}01$ i $\omega_{\max}=100$ možemo formirati tabelu 3 odgovarajućih linearnih preslikavanja frakcionog I/D na osnovu relacije (12).

| $N$ | $r$ | $s^{-r}$ | $I_r(s)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,1 | $\frac{1}{s^{0,1}}$ | $\frac{1584{,}8932\,(s+0{,}1668)(s+27{,}83)}{(s+0{,}1)\,(s+16{,}68)(s+2783)}$ |
| 3 | 0,2 | $\frac{1}{s^{0,2}}$ | $\frac{79{,}4328(s+0{,}05623)(s+1)(s+17{,}78)}{(s+0{,}03162)(s+0{,}5623)(s+10)(s+177{,}8)}$ |
| 4 | 0,3 | $\frac{1}{s^{0,3}}$ | $\frac{39{,}8107\,(s+0{,}0416)(s+0{,}3728)(s+3{,}34)(s+29{,}94)}{(s+0{,}02154)(s+0{,}1931)(s+1{,}73)(s+15{,}51)(s+138{,}9)}$ |
| 5 | 0,4 | $\frac{1}{s^{0,4}}$ | $\frac{35{,}4813(s+0{,}03831)(s+0{,}261)(s+1{,}778)(s+12{,}12)(s+82{,}54)}{(s+0{,}01778)(s+0{,}1212)(s+0{,}8254)(s+5{,}623)(s+38{,}31)(s+261)}$ |
| 5 | 0,5 | $\frac{1}{s^{0,5}}$ | $\frac{15{,}8489\,(s+0{,}03981)(s+0{,}2512)(s+1{,}585)(s+10)(s+63{,}1)}{(s+0{,}01585)(s+0{,}1)(s+0{,}631)(s+3{,}981)(s+25{,}12)(s+158{,}5)}$ |

Tabela 3. *Linearno preslikavanje frakcionog integratora (diferencijatora) reda* $r$ *za* $y=2\,\mathrm{dB}$, $p_{\mathrm{T}}=0{,}01$ *i* $\omega_{\max}=100$

Koristeći se relacijom (12) omogućena je primjena svih tehnika diskretizacije uključujući i aproksimacione polinome za diskretizaciju kontinualnih sistema.

Druga metoda analogne aproksimacije frakcionih I/D je slična prethodnoj, sa razlikom u određivanju odgovarajućih parametara iterativnom procedurom, što uveliko smanjuje vrijeme procesiranja [9,10]. Ova metoda polazi od relacije

$$s^{-r} \approx I_r(s) = \frac{1}{D_r(s)} = \left(\frac{1+s/\omega_{\mathrm{L}}}{1+s/\omega_{\mathrm{H}}}\right)^r = \prod_{k=1}^{N} \frac{1+s/b_k}{1+s/a_k}, \quad (13)$$

gdje su: $N$ - red aproksimacije, $\omega_{\mathrm{L}}$ donja a $\omega_{\mathrm{H}}$ gornja granična frekvencija, tako da je aproksimacija važeća u intervalu $\omega \in (\omega_{\mathrm{L}}, \omega_{\mathrm{H}})$. Ostali parametri su povezani relacijama:

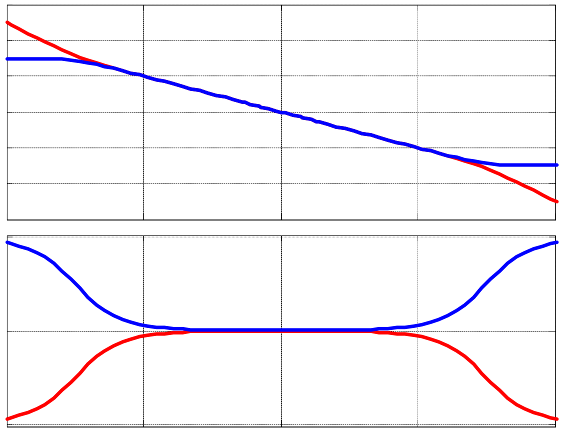
$$a_k = \alpha\, b_k, \qquad b_{k+1} = \eta\, a_k \ \text{ i } \ r = 1 - \frac{\log\alpha}{\log\alpha\eta}, \ \alpha, \eta > 1 \quad (14)$$

Jedan od zajedničkih nedostataka prethodnih aproksimacija je da se unosi velika greška u stacionarnom stanju.

Ako nam je potrebno da se odstupanje u stacionarnom stanju svede na nulu neophodno je izvršiti modifikaciju prethodne dvije metode, tj.

$$s^{-r} \approx \frac{1}{s\, I_{1-r}(s)} = \frac{D_{1-r}(s)}{s}, \ r \in (0,1) \quad (15)$$

Na ovaj način slabljenje u stacionarnom stanju frakcionog integratora i njegove analogne aproksimacije se poklapa za bilo koji frakcioni red $r \in (0,1)$ integratora, što je veoma bitno kod mnogih sistema regulacije sa integralnim dejstvom.



Slika 1. *Bodeov dijagram analogne aproksimacije* $1/\sqrt{s}$ *na osnovu relacije* (*13*) *i njene modifikacije sa redom* $N = 12$.

Da bi odredili digitalni ekvivalent frakcionog I/D možemo primijeniti aproksimacione polinome za diskretizaciju analognih modela frakcionih I/D koji su dati u tabeli 2, tj.

$$I_r(z) \leftrightarrow I_r(s) \quad (16)$$

$$I_r^m(z) \leftrightarrow \frac{1}{s\, I_{1-r}(s)} \quad (17)$$

Na ovaj način se može postići modularnost frakcionog integratora za bilo koji frakcioni red, kao što je prikazano u tabeli 4.

| $N$ | $r$ | $s^{-r}$ | $I_r(z)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,1 | $\frac{1}{s^{0,1}}$ | $\frac{0,3312(z+1,0188)(z-0,9725)(z-0,9998)}{(z+0,1675)(z-0,9834)(z-0,9999)}$ |
| 3 | 0,2 | $\frac{1}{s^{0,2}}$ | $\frac{0,20924(z+1,1332)(z-0,8375)(z-0.99)(z-0,9994)}{(z-0,0419)(z-0,9049)(z-0,9944)(z-0,9997)}$ |
| 4 | 0,3 | $\frac{1}{s^{0,3}}$ | $\frac{0,01856(z+1,023)(z-0,9705)(z-0,9967)(z-0,9996)}{(z-0,8701)(z-0,9846)(z-0,9983)(z-0,9998)}$ |
| 5 | 0,4 | $\frac{1}{s^{0,4}}$ | $\frac{0,01562(z+1,067)(z-0,9208)(z-0,9880)(z-0,9982)(z-0,9997)}{(z-0,7687)(z-0,9624)(z-0,9944)(z-0,9992)(z-0.9999)}$ |
| 5 | 0,5 | $\frac{1}{s^{0,5}}$ | $\frac{0,007330(z+1,051)(z-0,9389)(z-0,9900)(z-0,9984)(z-0,9997)}{(z-0,8530)(z-0,9752)(z-0,9960)(z-0,9994)(z-0.9999)}$ |

Tabela 4. *Diskretni model frakcionih integratora dobijen iz analognog modela za* $T = 0,001$ *pomoću transformacionih polinoma*

Diskretni frakcioni integratori dati u tabeli 4 su dobijeni iz analognog modela za frakcione integratore prikazane, u tabeli 3. Jedna od dobrih osobina ovakvih diskretnih I/D je da im je red adekvatnog modela relativno mali u odnosu na neke druge modele dobijene direktnim putem diskretizacije primjenom klasičnih metoda, kao što je Tustinova metoda i njoj slične metode diskretizacije analognih sistema. Napomenimo da dobijeni modeli frakcionih I/D moraju biti stabilni bilo da se radi o analognoj ili digitalnoj aproksimaciji. Red digitalnog modela frakcionog I/D može zbog numeričke greške da bude manji od analognog modela, kao što se to vidi iz prethodnih tabela za frakcioni red integratora ($r = 0,3$), jer su nule i polovi digitalnog modela jako bliski i time dolazi do njihovog skraćivanja. Na ovaj način se unosi greška u aproksimaciji numeričkim putem pa se mora povećati preciznost. Radi toga, pri korišćenju transformacionih polinoma, mora se voditi računa o numeričkoj grešci koja može da se unese u procesu zaokruživanja brojeva, zato što su polovi diskretnog modela frakcionih I/D jako bliski jediničnom krugu.

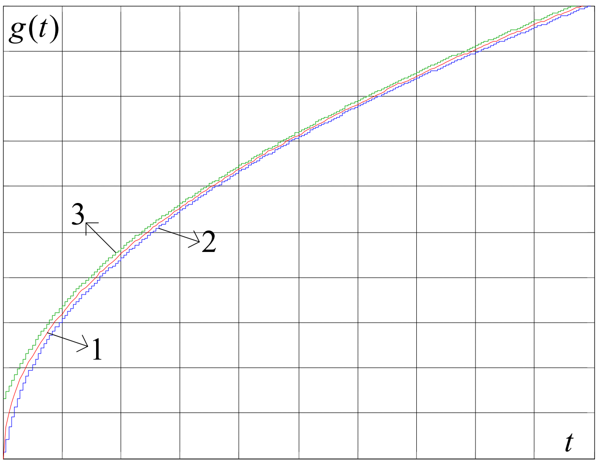
*Primjer* 1. Za frakcioni integrator $1/\sqrt{s}$ skicirati odskočne odzive njegovih diskretnih modela i uporediti ih sa odskočnim odzivom frakcionog I/D dobijenog analitički.

Koristeći se sledećom relacijom Laplasove transformacije

$$L\{t^{\alpha}\ h(t)\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\ ,\ \alpha > -1 \qquad (18)$$

dobijamo analitički oblik signala frakcionog integratora $1/\sqrt{s}$ na odskočnu pobudu

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1,5}}\right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\ . \qquad (19)$$




Slika 3. *Odskočni odziv frakcionog integratora* $1/\sqrt{s}$ *dobijen analitički i odskočni odzivi odgovarajućih diskretizovanih modela*

Odzivi frakcionog integratora $1/\sqrt{s}$ na prethodnoj slici, označeni brojevima od 1 do 3, respektivno predstavljaju odskočne odzive: dobijene analitički, dobijene na osnovu relacije (16) i dobijene na osnovu relacije (17) uz adekvatnu primjene transformacionih polinoma. Na osnovu dobijenih dijagrama jasno se uočava da su oba digitalna modela adekvatna jer imaju dobro poklapanje sa odskočnim odzivom frakcionog I/D dobijenog analitičkim putem na osnovu relacije (19).

## 4. ZAKLJUČAK

U svrhu diskretizacije kontinualnih frakcionih I/D, zavisno od same njihove namjene, do sada je razvijeno niz aproksimacionih modela [11]. Potreba za diskretizacijom, frakcionih I/D se ogleda, prije svega, u realizaciji frakcionih regulatora. To znači, na primjer, digitalna realizacija frakcionog integralnog i frakcionog diferencijalnog dejstva FPID (frakcioni PID) regulatora u cilju njihove praktične primjene za regulaciju objekata upravljanja. Na ovaj način se mogu formirati novi algoritmi upravljanja koji će imati prije svega svoje prednosti u odnosu na konvencionalne regulatore. Sa istim ciljem u radu su razvijeni novi digitalni modeli frakcionih I/D.

## LITERATURA


[1] M. R. Stojić, Digital Control Systems, Akademska Misao, Belgrade, 2004.

[2] Katshuiko Ogata, Discrete-time Control Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1994.

[3] T. B. Šekara, Lj. S. Draganović i M. S. Stanković, "Nove aproksimacije u diskretizaciji kontinualnih sistema" XLVI Konf. ETRAN, Sveska 1, 2002, Banja Vrućica, Republika Srpska, pp. 220-223.

[4] K. J. Åström, P. Hagander and J. Sterbnby, "Zeros of Sampled Systems", 1984, IEEE Automatica, 20. 31-38., 1984.

[5] K. J. Åström, Bjorn Wittenmark, Computer controlled systems: Theory and Design, Prentice-Hall International Editions, 1984.

[6] T. B. Šekara, M. S. Stanković, "Novi aproksimacioni polinomi za diskretizaciju kontinualnih sistema" XLVII Konf. ETRAN, Sveska 1, 2003, Herceg Novi, pp. 247-250.

[7] R. Gessing. "Comments on a modification and the Tustin approximation with a Concluding Proposition" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 40, pp. 942-944. 1995.

[8] Er-Wei Bai, Zhi Ding, "Zeros of sampled data systems represented by FIR models", Automatica, 36 (2000) 121-123.

[9] Wajdi M. Ahmad and J.C. Sprott, "Chaos in Fractional-Order Autonomous Nonlinear Systems" Solitons & Fractals 2003; 16:339-51

[10] Tom T. Hartley, Carl F. Lorenzo and Helen Killory Qammar, "Chaos in a fractional Order Chua Systems" NASA tehnical paper 3543, 1996.

[11] YangQuan Chen, B.M.Vinagre and I. Podlubny: "A new discretization method for fractional order differentiators via continued fraction expansion" Proceedings of DETC'2003, Sept. 2-6, Chicago, USA



**Abstract** - The original method for discretization of fractional integrators / differentiators (I/D) is presented in this paper. The adequate comparative analysis of this and several other well-known discretization methods is also performed through suitable examples. It is shown that the use of this method enables modular approach and makes the discretization error less in comparison to other aproximative methods.


**INDIRECT APPLICATION OF TRANSFORMATION POLYNOMS FOR DISCRETIZATION OF FRACTIONAL INTEGRATORS (DIFFERENTIATORS)**


Tomislav B. Šekara