Zbornik radova 49. Konferencije za ETRAN, Budva, 5-10. juna 2005, tom I
Proc. 49th ETRAN Conference, Budva, June 5-10, 2005, Vol. I

ALTERNATIVNI PRILAZ REŠAVANJU NEKIH PROBLEMA DISKRETIZACIJE U TEORIJI UPRAVLJANJA

Milica B. Naumović, *Elektronski fakultet u Nišu*

Sadržaj - *U literaturi su dobro poznate metode diskretizacije modela kontinualnog objekta bez i sa kašnjenjem, kao i diskretizacije kontinualnog kvadratnog indeksa performanse. Metod diskretizacije, koji se u ovom radu prezentuje, ilustruje primenu* VAN LOAN*ove formule za nalaženje eksponenta blok trougaone matrice* [1].

1. UVOD

U brojnim aplikacijama u teoriji upravljanja potrebno je odrediti matrični eksponent. Rešavanje linearnog optimalnog problema regulacije, na primer, zahteva izračunavanje različitih integrala sa matričnim eksponentima. VAN LOANov metod za izračunavanje četiri karakteristična integrala, koja nalaze dalju primenu u teoriji upravljanja, zasnovan je na nalaženju eksponenta blok trougaone matrice, koja svojevrsnim kombinovanjem submatrica može da poprimi neke posebne forme [1]. Matrični eksponent je jedna od najčešće izračunavanih matričnih funkcija [2], a neki od brojnih algoritama, koji su u tu svrhu do sada razvijeni, čak su i sumnjivih numeričkih performansi [3].

U nastavku je, u vidu teoreme, data VAN LOANova formula za nalaženje eksponenta blok trougaone matrice [1].

TEOREMA 1. Neka su n_i, $i=1,2,3,4$ pozitivne celobrojne veličine čiji je zbir jednak m. Ako je $\mathbf{C}$ $m\times m$ blok trougaona matrica definisana na način

$$\mathbf{C}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_4\end{array}\right]\begin{array}{l}\}n_1\\ \}n_2\\ \}n_3\\ \}n_4\end{array}\\ \begin{array}{cccc}\underbrace{}_{n_1} & \underbrace{}_{n_2} & \underbrace{}_{n_3} & \underbrace{}_{n_4}\end{array}\end{array}, \tag{1}$$

tada za $t\geq 0$ važi

$$\mathrm{e}^{\mathbf{C}t}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_1(t) & \mathbf{G}_1(t) & \mathbf{H}_1(t) & \mathbf{K}_1(t)\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2(t) & \mathbf{G}_2(t) & \mathbf{H}_2(t)\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_3(t) & \mathbf{G}_3(t)\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_4(t)\end{bmatrix}, \tag{2}$$

gde je

$$\mathbf{F}_j(t)=\mathrm{e}^{\mathbf{A}_j t},\quad j=1,2,3,4 \tag{3}$$

$$\mathbf{G}_j(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}_j(t-s)}\mathbf{B}_j\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_{j+1}s}\,\mathrm{d}s,\quad j=1,2,3 \tag{4}$$

$$\mathbf{H}_j(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}_j(t-s)}\mathbf{C}_j\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_{j+1}(s-r)}\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

$$+\int_0^t\int_0^s \mathrm{e}^{\mathbf{A}_j(t-s)}\mathbf{B}_j\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_{j+1}(s-r)}\mathbf{B}_{j+1}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_{j+2}r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s,\quad j=1,2$$

$$\mathbf{K}_1(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1(t-s)}\mathbf{D}_1\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_4 s}\,\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t\int_0^s \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1(t-s)}\left[\mathbf{C}_1\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_3(s-r)}\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_1\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2(s-r)}\mathbf{C}_2\right]\mathrm{e}^{\mathbf{A}_4 r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t\int_0^s\int_0^r \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1(t-s)}\mathbf{B}_1\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2(s-r)}\mathbf{B}_2\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_3(r-w)}\mathbf{B}_3\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_4 w}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,. \tag{6}$$

POSLEDICA TEOREME 1.

Neka su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{Q}_\mathrm{c}$ realne matrice dimenzija $n\times n$, $n\times p$ i $n\times n$, respektivno. Matrica $\mathbf{Q}_\mathrm{c}$ je simetrična $\left(\mathbf{Q}_\mathrm{c}^\mathsf{T}=\mathbf{Q}_\mathrm{c}\right)$ i pozitivno semidefinitna matrica $\left(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_\mathrm{c}\mathbf{x}\geq 0\right)$.

Na osnovu prethodne teoreme se pokazuje da je integral

$$\mathbf{Q}(T)=\int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}^\mathsf{T}s}\mathbf{Q}_\mathrm{c}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}s}\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

moguće sračunati na sledeći način

$$\mathbf{Q}(T)=\mathbf{F}_3(T)^\mathsf{T}\mathbf{G}_2(T), \tag{8}$$

gde je

$$\exp\left(\begin{bmatrix}-\mathbf{A}^\mathsf{T} & \mathbf{Q}_\mathrm{c}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}\end{bmatrix}T\right)=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_2(T) & \mathbf{G}_2(T)\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_3(T)\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Analitičko sračunavanje matričnog eksponenta za proizvoljnu vrednost periode diskretizacije T ili nekog drugog podešljivog parametra, omogućava dalju analizu efekata promene ovih parametara. Podsetimo da je bilo koju matričnu funkciju $f(\mathbf{C})$ moguće sračunati primenom dobro poznate CAYLEY-HAMILTONove teoreme. Štaviše, u slučaju da su svojstvene vrednosti matrice $\mathbf{C}$ različite, proizvoljnu matričnu funkciju moguće je odrediti na relativno jednostavan način putem dekompozicije razmatrane matrice po svojstvenim vrednostima [2], [4]. U radu su redom rešavani problemi diskretizacije modela kontinualnog sistema bez i sa kašnjenjem, kao i diskretizacija kontinualnog kvadratnog indeksa performanse nalaženjem eksponenta matrice odgovarajuće forme.

2. DISKRETIZACIJA MODELA KONTINUALNOG SISTEMA

Iz razloga jednostavnosti, a ne umanjujući opštost zaključaka, razmotrimo slučaj n - dimenzionalnog objekta sa po jednim ulazom i izlazom. U cilju jednostavnijeg definisanja kontinualnog i digitalnog modela objekta, celishodno je formirati odgovarajuće realizacione skupove na način [5]:

$$\mathrm{S}_\mathrm{c}\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\left(\mathbf{A}_\mathrm{c},\mathbf{b}_\mathrm{c},\mathbf{d}\right):G_\mathrm{c}(s)=\frac{N_\mathrm{c}(s)}{D_\mathrm{c}(s)}=\mathbf{d}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_\mathrm{c}\right)^{-1}\mathbf{b}_\mathrm{c}\right\}, \tag{10}$$

$$\mathrm{S_q} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \left(\mathbf{A}_\mathrm{q}, \mathbf{b}_\mathrm{q}, \mathbf{d}\right) : G_\mathrm{q}(z) = \frac{N_\mathrm{q}(z)}{D_\mathrm{q}(z)} = \mathbf{d}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_\mathrm{q}\right)^{-1}\mathbf{b}_\mathrm{q} \right\}, \quad (11)$$

sa već uspostavljenim relacijama oblika

$$\mathbf{A}_\mathrm{q} = \mathbf{\Phi}(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}T}, \quad (12)$$

$$\mathbf{b}_\mathrm{q} = \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}\tau}\mathbf{b}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}\tau, \quad (13)$$

i

$$G_\mathrm{q}(z) = Z\,\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}G_\mathrm{c}(s)\right\}. \quad (14)$$

Dakle (11) predstavlja diskretnu reprezentaciju sistema (10) sa kolom odabiranja i zadrške nultog reda, odnosno tzv. q-model kontinualnog sistema. Interesantno je uočiti da se obe matrice , $\mathbf{A}_\mathrm{q}$ i $\mathbf{b}_\mathrm{q}$, mogu sračunati simultano pomoću jednog matričnog eksponenta.

Ako se definiše $(n+1)\times(n+1)$ matrica $\mathbf{M}$ na način

$$\mathbf{M} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_\mathrm{c} & \mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \hdashline \mathbf{0} & 0 \end{array}\right]}_{n} \}\, n, \quad (15)$$

na osnovu VAN LOANovih formula (1)-(6) za matrični eksponent dobijamo

$$\mathrm{e}^{\mathbf{M}T} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_\mathrm{q} & \mathbf{b}_\mathrm{q} \\ \hdashline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]. \quad (16)$$

Dokaz prethodnog tvrđenja dat je u prilogu rada.

Dakle, matrice modela $\mathbf{A}_\mathrm{q}$ i $\mathbf{b}_\mathrm{q}$ izračunavaju se na način

$$\left[\mathbf{A}_\mathrm{q} \;\vdots\; \mathbf{b}_\mathrm{q}\right] = \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{0}\right]\cdot \mathrm{e}^{\mathbf{M}T}, \quad (17)$$

pri čemu je

$$\left[\mathbf{A}_\mathrm{c} \;\vdots\; \mathbf{b}_\mathrm{c}\right] = \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{0}\right]\cdot \mathbf{M}. \quad (18)$$

Primer 1.

Potražimo kontinualni model objekta čiji je digitalni model dat sa $\left[\mathbf{A}_\mathrm{q} \;\vdots\; \mathbf{b}_\mathrm{q}\right] = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \end{bmatrix}$.

U cilju primene relacija (15)-(18), formirajmo matricu

$$\mathbf{M}_1 = \mathrm{e}^{\mathbf{M}T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{q} & \mathbf{b}_\mathrm{q} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

koja ima trostruku svojstvenu vrednost $\lambda = 1$. Kako je matrica $\mathbf{M}_1$ pozitivno definitna matrica, za matricu $\mathbf{M}$ pišemo $\mathbf{M} = (\ln \mathbf{M}_1)/T = f(\mathbf{M}_1) = \alpha_1\mathbf{M}_1^2 + \alpha_2\mathbf{M}_1 + \alpha_3$, pa je $f(\lambda) = (\ln\lambda)/T$ i $\alpha(\lambda) = \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$, odakle sledi

$$f(1) = 0 \qquad \alpha(1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$f^{(1)}(1) = 1/T \qquad \alpha^{(1)}(1) = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

$$f^{(2)}(1) = -1/T \qquad \alpha^{(2)}(1) = 2\alpha_1 \quad .$$

Matrice kontinualnog modela nalazimo na način $\mathbf{A}_\mathrm{c}$ $\mathbf{b}_\mathrm{c}$

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2T}\begin{bmatrix} 1 & 2T & 2T^2 \\ 0 & 1 & 2T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{T}\begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2T}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3. DISKRETIZACIJA MODELA KONTINUALNOG SISTEMA SA KAŠNJENJEM

Razmatramo kontinualni sistem sa kašnjenjem sa po jednim ulazom i izlazom koji je opisan modelom u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\mathrm{c}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_\mathrm{c}u(t-\tau) \quad (19)$$

$$c(t) = \mathbf{d}\mathbf{x}(t), \quad (20)$$

gde je $\tau = (d-1)T + \tau'$, $0 < \tau' \le T$ i $d\,(\ge 1)$ ceo broj. (21)

Funkcija diskretnog prenosa sistema sa kašnjenjem nalazi se primenom modifikovane ZZ transformacije [6]. Diskretni model sistema (19)-(21) u prostoru stanja može se naći u literaturi [7]-[9], [4] u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[(k+1)T] \\ u(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ u[(k-1)T] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 \\ 1 \end{bmatrix}u(kT) \quad \text{za } d = 1, \quad (22)$$

ili za $d \ge 2$ u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[(k+1)T] \\ u(kT-dT+1) \\ \vdots \\ u(kT-T) \\ u(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ u(kT-dT) \\ \vdots \\ u(kT-2T) \\ u(kT-T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(kT), \quad (23)$$

gde je

$$\mathbf{\Phi} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}T}$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}(T-\tau')}\int_0^{\tau'}\mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}\lambda}\mathbf{b}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \int_0^{T-\tau'}\mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}\lambda}\mathbf{b}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}\lambda \quad (24)$$

i

$$c(kT) = \mathbf{d}\mathbf{x}(kT). \quad (25)$$

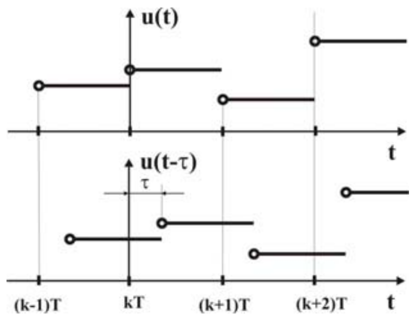
Podsetimo da se na ulaz objekta dovodi digitalni signal preko D/A konvertora ili kola zadrške nultog reda; kontinualni stepenasti signali $u(t)$ i $u(t-\tau)$, $\tau < T$ prikazani su na Sl. 1.

Kretanje posmatranog dinamičkog sistema opisanog sa (19)-(21) u intervalu $kT \le t < (k+1)T$ je dato sa

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t-kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{\Theta}(t-kT)u[(k-1)T], \quad kT \le t < kT + \tau \quad (26)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t-kT-\tau)\mathbf{x}(kT+\tau) + \mathbf{\Theta}(t-kT-\tau)u(kT), \quad kT + \tau \le t < (k+1)T, \quad (27)$$

gde je $\mathbf{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_\mathrm{c}t}$ i $\mathbf{\Theta}(t-\lambda) = \int_\lambda^t \mathbf{\Phi}(t-\upsilon)\mathbf{b}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}\upsilon$. (28)



Sl.1. *U delovima konstantni signali* $u(t)$ *i* $u(t-\tau)$, $\tau < T$

Smenjujući $t = kT + \tau$ u (26) i $t = (k+1)T$ u (27), dobijamo

$$\mathbf{x}(kT+\tau) = \mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{\Theta}(\tau)u\left[(k-1)T\right] \tag{29}$$

i $$\mathbf{x}\left[(k+1)T\right] = \mathbf{\Phi}(T-\tau)\mathbf{x}(kT+\tau) + \mathbf{\Theta}(T-\tau)u(kT)\ . \tag{30}$$

Relacije (29) i (30) u funkciji matrice $\mathbf{M}$ i njenog eksponenta, koje su definisane sa (15) i (16), možemo da prepišemo na način

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(T+\tau) \\ u(kT-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q1} & \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ u(kT-T) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\mathbf{M}\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ u(kT-T) \end{bmatrix}$$

i (31)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}\left[(k+1)T\right] \\ u(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q2} & \mathbf{b}_{q2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT+\tau) \\ u(kT) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\mathbf{M}(T-\tau)} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT+\tau) \\ u(kT) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Zamenjujući (31) u (32) dobijamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}\left[(k+1)T\right] \\ u(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q2} & \mathbf{b}_{q2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q1}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}_{q1}u(kT-T) \\ u(kT) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q2}\mathbf{A}_{q1}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{A}_{q2}\mathbf{b}_{q1}u(kT-T) + \mathbf{b}_{q2}u(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Uočimo da za proizvod matričnih eksponenata imamo

$$\mathrm{e}^{\mathbf{M}(T-\tau)}\,\mathrm{e}^{\mathbf{M}\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q2} & \mathbf{b}_{q2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q1} & \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q2}\mathbf{A}_{q1} & \mathbf{A}_{q2}\mathbf{b}_{q1} + \mathbf{b}_{q2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Poređenjem relacija (33)-(34) i (22)-(23) možemo uspostaviti veze

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= \mathbf{A}_{q2}\mathbf{A}_{q1} \\ \mathbf{\Gamma}_0 &= \mathbf{b}_{q2} \\ \mathbf{\Gamma}_1 &= \mathbf{A}_{q2}\mathbf{b}_{q1} \end{aligned} \tag{35}$$

Primer 2.

Diskretizovati model kontinualnog objekta upravljanja sa kašnjenjem opisanog u prostoru stanja sa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t-\tau),\ \text{ako je } \tau = 0.2 \ \text{ i } \ T = 0.3\,.$$

Kako je $$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{b}_c \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathrm{e}^{\mathbf{M}\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q1} & \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^{\tau} & 0 & \mathrm{e}^{\tau}-1 \\ \tau\,\mathrm{e}^{\tau} & \mathrm{e}^{\tau} & (\tau-1)\,\mathrm{e}^{\tau}+1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{i}$$

$$\mathrm{e}^{\mathbf{M}(T-\tau)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q2} & \mathbf{b}_{q2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^{T-\tau} & 0 & \mathrm{e}^{T-\tau}-1 \\ (T-\tau)\,\mathrm{e}^{T-\tau} & \mathrm{e}^{T-\tau} & (T-\tau-1)\,\mathrm{e}^{T-\tau}+1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

to je $$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}_{q2}\mathbf{A}_{q1} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{T} & 0 \\ T\,\mathrm{e}^{T} & \mathrm{e}^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.350 & 0 \\ 0.405 & 1.350 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{b}_{q2} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{T-\tau}-1 \\ (T-\tau-1)\,\mathrm{e}^{T-\tau}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.105 \\ 0.005 \end{bmatrix}$$

i $$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{A}_{q2}\mathbf{b}_{q1} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{T-\tau}(\mathrm{e}^{\tau}-1) \\ \mathrm{e}^{T-\tau}(1-T+\tau) + \mathrm{e}^{T}(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.245 \\ 0.050 \end{bmatrix}.$$

4. DISKRETIZACIJA KONTINUALNE KVADRATNE KRITERIJUMSKE FUNKCIJE

Diskretna verzija kontinualne kvadratne kriterijumske funkcije date sa

$$\mathrm{J} = \tfrac{1}{2}\int_0^t \left[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{R}\mathbf{u}(\tau)\right]\mathrm{d}\,\tau\,, \tag{36}$$

može se prikazati u obliku

$$\mathrm{J}_{\mathrm{d}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(iT) & \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(iT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(iT) \\ \mathbf{u}(iT) \end{bmatrix}, \tag{37}$$

gde je $N = t/T$ [10]. Ako interval $(0,t)$ podelimo u N jednakih podintervala trajanja T, relaciju (36) moguće je prepisati na način

$$\mathrm{J} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \int_{iT}^{(i+1)T} \left[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{R}\mathbf{u}(\tau)\right]\mathrm{d}\,\tau\ . \tag{38}$$

Kako je

$$\mathbf{x}(iT+\tau) = \mathbf{A}_{\mathrm{q}}(\tau)\mathbf{x}(iT) + \mathbf{b}_{\mathrm{q}}(\tau)\mathbf{u}(iT)\quad , \tag{39}$$

sa $$\mathbf{A}_{\mathrm{q}}(\tau) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_{\mathrm{c}}\tau} \quad \text{i} \quad \mathbf{b}_{\mathrm{q}}(\tau) = \int_0^{\tau} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_{\mathrm{c}}\eta}\mathbf{b}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{d}\,\eta\ , \tag{40}$$

to za integral ispod sume u (38) pišemo

$$\int_{iT}^{(i+1)T} \left[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{R}\mathbf{u}(\tau)\right]\mathrm{d}\,\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(iT) & \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(iT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(iT) \\ \mathbf{u}(iT) \end{bmatrix}, \tag{41}$$

gde je

$$\mathbf{A}_{11} = \int_0^T \mathbf{A}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{A}_{\mathrm{q}}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\,, \tag{42}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \int_0^T \mathbf{A}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{b}_{\mathrm{q}}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\ , \tag{43}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \int_0^T \mathbf{b}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{A}_{\mathrm{q}}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \mathbf{A}_{12}^{\mathrm{T}}\ , \tag{44}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \int_0^T \left\{\mathbf{b}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{b}_{\mathrm{q}}(\tau) + \mathbf{R}\right\}\mathrm{d}\,\tau\ . \tag{45}$$

Uočimo da relacije (42)–(45) možemo da prepišemo na način:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(\tau) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{q}}(\tau) & \mathbf{b}_{\mathrm{q}}(\tau) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathrm{d}\,\tau\ . \tag{46}$$

Da bi se izbeglo nalaženje integrala (46), ekvivalentna matrica pojačanja u (37) može se sračunati korišćenjem veza (7)-(9) zasnovanim na VAN LOANovoj formuli za nalaženje eksponenta blok trougaone matrice [11]. Naime, u matričnom eksponentu

$$\exp\left(\left[\begin{array}{cc|cc} -\mathbf{A}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathrm{c}} & \mathbf{b}_{\mathrm{c}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] T\right) \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Phi}_{11} & \mathbf{\Phi}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{22} \end{array}\right], \tag{47}$$

je $$\mathbf{\Phi}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{q} & \mathbf{b}_\mathrm{q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{\Phi}_{11} = \mathbf{\Phi}_{22}^\mathrm{T} \ . \tag{48}$$

Otuda, na osnovu relacija (7) i (46) dobijamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}_{11}\mathbf{\Phi}_{12} \ . \tag{49}$$

5. ZAKLJUČAK

U radu je prezentovan postupak diskretizacije koji omogućava simultano određivanje obe matrice digitalnog q modela pomoću jednog matričnog eksponenta. Ukazano je na moguće primene ovog postupka u nekim zadacima upravljanja.

DODATAK. *Dokaz relacije* (16)

I način.

Indukcijom se pokazuje da je

$$\mathbf{M}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^k & \mathbf{A}_\mathrm{c}^{k-1}\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{za} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Za $k = 1$ dobijamo

$$\mathbf{M}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^1 & \mathbf{A}_\mathrm{c}^0\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c} & \mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} .$$

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko k, odnosno

$$\mathbf{M}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^k & \mathbf{A}_\mathrm{c}^{k-1}\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} .$$

Tada je

$$\mathbf{M}^{k+1} = \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^k & \mathbf{A}_\mathrm{c}^{k-1}\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c} & \mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^{k+1} & \mathbf{A}_\mathrm{c}^k\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

pa na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je tvrđenje tačno za svako $k \in \mathbf{N}$. Nalazeći matrični eksponent kao beskonačni težinski red sledi

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathbf{M}T} &= \mathbf{I} + \mathbf{M}T + \frac{\mathbf{M}^2T^2}{2!} + \frac{\mathbf{M}^3T^3}{3!} + \cdots \\ &= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c} & \mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^2 & \mathbf{A}_\mathrm{c}\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \frac{T^2}{2!} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{c}^3 & \mathbf{A}_\mathrm{c}^2\mathbf{b}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \frac{T^3}{3!} + \cdots \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} + \mathbf{A}_\mathrm{c}T + \mathbf{A}_\mathrm{c}^2\mathbf{A}^2\frac{T^2}{2!} + \mathbf{A}_\mathrm{c}^3\frac{T^3}{3!} + \cdots & \mathbf{0} + \mathbf{b}_\mathrm{c}T + \mathbf{A}_\mathrm{c}\mathbf{b}_\mathrm{c}\frac{T^2}{2!} + \mathbf{A}_\mathrm{c}^2\mathbf{b}_\mathrm{c}\frac{T^3}{3!} + \cdots \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_\mathrm{q} & \mathbf{b}_\mathrm{q} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

II način.

Definišimo matricu $\mathbf{C}$ u (1) na način $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$ i potražimo njen eksponent u obliku $\mathrm{e}^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(t) & \mathbf{G}_1(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2(t) \end{bmatrix}$.

Izjednačavanjem submatrica u jednačini

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{C}t}\right] = \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{C}t} \ , \quad \mathbf{I} = \mathrm{e}^{\mathbf{C}t}\Big|_{t=0} \ , \text{ dobijamo}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_1(t) & \dot{\mathbf{G}}_1(t) \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{F}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(t) & \mathbf{G}_1(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2(t) \end{bmatrix} \text{, odnosno}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{F}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(t) && \mathbf{F}_1(0) = \mathbf{I} \\ &\dot{\mathbf{G}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{G}_1(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{F}_1(t) && \mathbf{G}_1(0) = \mathbf{0} \ , \\ &\dot{F}_2(t) = 0 && F_2(0) = 1 \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(t) &= \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 t} \\ \mathbf{G}_j(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1(t-s)}\mathbf{B}_1\mathrm{e}^{0\cdot s}\,\mathrm{d}s \\ F_2(t) &= \mathrm{e}^{0\cdot t} = 1 \ . \end{aligned}$$

LITERATURA

[1] C. Van Loan, “Computing Integrals Involving the Matrix Exponential”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-23, No. 3, pp. 395-404, 1978.

[2] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1983.

[3] C.B. Moler, C.F. Van Loan, “Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix”, *SIAM Review*, Vol. 20, No. 4, pp. 801-836, 1978.

[4] R. J. Vaccaro, *Digital Control, A State-Space Approach,* McGraw-Hill, Inc., 1995.

[5] M.B. Naumović, *Z ili delta transformacija?*, Publikacije Elektronskog fakulteta u Nišu, Edicija: Monografije, 2002.

[6] E. I. Jury, *Theory and Application of the z- Transform Method,* New York: Wiley, 1964.

[7] G.F. Franklin, J.D. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.

[8] B. Wittenmark, “Sampling of a System with a Time Delay”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, No. 5, pp. 507-510, 1985.

[9] K.J. Åström, B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.

[10] P. Katz, *Digital Control Using Microprocessors,* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981.

[11] G.F. Franklin, J.D. Powell, M.L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, New York: Addison-Wesley, 1990.

Abstract - The methods of obtaining the discrete equivalents for the models of continuous-time objects without and with time delay, as well as the continuous-time quadratic performance index, are well-known in the literature. The discretizing method, presented in this paper, illustrates the use of VAN LOAN’s formula for derivation of block triangular matrix exponential [1].

AN ALTERNATIVE APPROACH TO SOLVING SOME DISCRETIZING PROBLEMS IN CONTROL THEORY

Milica B. Naumović