Zbornik radova 49. Konferencije za ETRAN, Budva, 5-10. juna 2005, tom I
Proc. 49th ETRAN Conference, Budva, June 5-10, 2005, Vol. I

REDUKCIJA MODELA METODOM STOHASTIČKOG ODSECANJA I ROBUSNOST PRAĆENJA POKRETNIH CILJEVA

Krsta Brčić, *Tehnički opitni centar Beograd*

Sadržaj – *Razmatra se efikasnost redukovanog modela na bazi balansiranog stohastičkog odsecanja sa aspekta robusnositi praćenja pokretnog cilja. Za model trajektorije cilja odabrana je vektorska funkcija koja opisuje približno konstantnu površinu u jedinici vremena (Keplerov zakon).*

Da bi se pokazala efikasnost tako redukovanog modela upoređivan je sa redukovanim modelom metodom balansiranja prema apsolutnoj grešci. U oba slučaja je korišćen Schur-ov metod dekompozicije matrica.

1. UVOD

U najvećem broju slučajeva se u sistemima za praćenje pokretnih ciljeva koriste se algoritmi na bazi modela. Razlog tome je što su se algoritmi sa dobro odabranim modelom cilja pokazali superirnijim u odnosu na algoritme koji nisu zasnovani na modelu cilja. S obzirom na značaj dobrog modela cilja (trajektorije i idrugih svojstva) za realizaciju sistema za praćenje pokretnih ciljeva ovaj problem je bio razmatranja i analize mnogih istraživača i laboratorija koji se bave segmentom odbrane i kontrolom vazdušnog saobraćaja.

Do sada je razvijen veliki broj modela kretanja cilja, od kojih su neki i publikovani [1], o čemu se može naći dosta informacija u literaturi [2] koja razmatra probleme praćenja pokretnih ciljeva i sadrži retrospektivu velikog broja standardnih modela.

Svaka nesaglasnost modela sa realnim sistemom može se izraziti kao perturbacija ulaza, odnosno izlaza sistema, a neodređenosti svrstati na one koje se odnose na parametre sistema i na one koje se odnose na strukturu sistema [3]. Pri tome, izostavljanje dela modela bilo zato što je nepoznat ili zato što se želi smanjenje složenosti sistema, degradira robusnost i performanse sistema za praćenje na bazi modela.

Algoritmi koji se najčešće koriste za redukciju linearnih, stabilnih, vremenski kontinualnih i diskretnih modela su zasnovani na balansiranju granične *apsolutne greške*, pri čemu se aproksimacija vrši *balansiranim odsecanjem*, na bazi singularne perturbacije i na bazi Hankel-ove norme [6]. Pored ovih, koriste se i takozvane nebalansirajuće kvadratne metode koje dobro uslovljenim odsecanjem matrica, u kombinaciji sa nekom faktorizacijom, kao što je napr. Cholesky-eva faktorizacija Gramiana, ili tehnikom spektralne dekompozicije, mogu dati dobar rezultat redukcije i nestabilnih sistema. Međutim, metode na bazi aproksimacije balansiranim odsecanjem primenljive su i na redukciju vremenski periodično promenljivih sistema.

Ako se u algoritmu redukcije koristi umesto kriterijuma apsolutne greške kriterijum granične *relativne greške aproksimacie*, može se metodom spektralne faktorizacije realizovati redukovan model sa uniformnom greškom aproksimacije u željenom frekventnom opsegu i da se pri tome očuva informacija o fazi. Takav metod je ***balansirano stohastičko*** *odsecanje*, a naziva se tako, jer se radi o spektralnoj faktorizaciji modela odstupanja $\varepsilon_r \sim N(0,\sigma_\varepsilon)$, odnosno Fourier-ovoj transformaciji kovarijanse relativnog odstupanja redukovanog modela od modela punog reda:

$$\Gamma_{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau$$

Naravno, ovde je u pitanju je multivarijabilni sistem i razlika nije skalarna vrednost, pa je unekoliko i problem složeniji.

Primenom Schur-ovog metoda dekompozicije u postupku balansiranog stohastičkog odsecanja, izbegavaju se inicijalni problemi spektralne faktorizacije matrice funkcije prenosa. Na taj način se kompletan algoritam na bazi takve metode može učiniti veoma efikasnim za primenu u robustizaciji praćenja pokretnog cilja, a što se videti iz analize rezultata koji slede.

2. METODOLOGIJA REDUKCIJE

Na osnovu svojstva redukcije balansiranim stohastičkim odsecanjem modela i Schurove metode dekompozicije, koja se koristi u međupostupcima, rezultat ove redukcije je upoređivan sa Schur-ovim metodom balansiranog odsecanja modela na bazi granice apsolutne greške. Za model trajektorije pokretnog cilja izabran je sledeći model:

$$\frac{dA}{dt} = Const \text{, gde je .} \tag{2.1}$$

$$|dA| = \frac{1}{2} r^2 d\Omega .$$

Za prikaz efikasnosti algoritma koji se razmatra, model je na pogodan način razložen, a zatim redukovan navedenim metodom i analizirani frekventni odzivi singularnih vrednosti i greške.

2.1. *Model trajektorije cilja u sfernom koordinatnom sistemu*

Generalno, cilj se najvećim delom svoje putanje kreće pravilinijski, ali da bi izvršio svoju misiju cilj i manevriše, čineći zaokret ili izvodeći neki drugi oblik putanje. Iz tih razloga, kao model trajektorije cilja, za jednu konkretnu primenu, usvojićemo trodimenzinalni model u sfernim koordinatama, kakav je model dat relacijom (2.1). Uzeto je da vektor daljine cilja opisuje konstantnu površinu jedinici vremena [4]. Na taj način, model je blizak realnoj trajektoriji za pravolinijsko kretanje, ali i za zaokret. Linearizcijom, redukcijom i određivanjem granica razlike koja je posledica tako zanemarenih nelinearnosti i interkonekcije može se dobiti veoma pogodan model za praktičnu primenu. Model je u sfernom koordinatnom sistemu, jer se cilj prati pomoću senzora sa platforme koja rotira po pravcu i po visini, tako da odstupanja očekivanih podataka o cilju budu što manja od stvarnih u vremenskom intervalu između između dva merenja. Potpun model ima veoma izražene interkonekcije koje ne mogu jednostavno zanemariti. Dakle treba takav model efikasno redukovati uz sukcesivnu proveru robusnosti. Tako dobijeni model možemo koristiti kao polazni model u

adaptivnim sistemima ili formirati skup modela za MMT, odnosno sastaviti nominalni model.
Saglasno polaznom opredeljenju za model opisan relacijom (2.1) i definisane uslove praćenja u sfernim koordinatama može se pisati:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{u} + \mathbf{w}\text{, gde je:} \tag{2.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{s}_r \boldsymbol{r}_0 + \dot{s}_n \boldsymbol{n}_0 + \dot{s}_c \boldsymbol{c}_0\,,$$

$$\dot{s}_r = \dot{r},\ \ \dot{s}_n = r\dot{\psi},\ \ \dot{s}_c = r\cos\psi\dot{\varphi}$$

Simboli $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0$ i $\boldsymbol{c}_0$ označavaju jedinične vektore u sfernom koordinatnom sistemu.

Razvijen i sređen oblik relacije (2.2) bio bi:

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r(\dot{\psi}^2 - \dot{\varphi}^2\cos^2\psi) = u_r + w_r \\ &\ddot{\psi} + \alpha\dot{\psi} - \dot{\varphi}^2\cos\psi\cdot\sin\psi = u_\psi + w_\psi\,, \\ &\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + 2tg\psi\cdot\dot{\varphi} = u_\varphi + w_\varphi \end{aligned} \tag{2.3}$$

gde je: $\alpha = 2\frac{\dot{r}}{r}$, $u_\psi = \frac{u_v}{r}$ i $u_\varphi = \frac{u_c}{r\cos\psi}$.
Ovaj princip preuređivanja relacija i uvođenje pomoćnih stanja može se sresti i za druge modele sa jakim interkonekcijama kao što je model vertikalnog uzletanja i sletanja aviona [5]. Uvođenjem pomoćnih promenljivih, mogu se interkonekcije učiniti manje značajnim tako da se mogu aproksimirati stohastičkim promeljivim.

Za model (2.3) je specifično da se koeficijent α sporo menja, a za uglove manje od 0,1 rad može se usvojiti da je $\sin(\lambda) \approx \lambda$ i $\cos(\lambda) \approx 1$ i da se nastala razlika modelira stohastičkim promenljivim tipa $\varepsilon \sim N(0,\sigma_\varepsilon)$. To je prihvatljivo i za ciljeve koji se kreću brzinom većom od 1,5M, ukoliko je period inoviranja opservacija $T \leq 0{,}1$ s, tj. kada je opseg promena vektora stanja $x = (r,\psi,\varphi,\dot{r},\dot{\psi},\dot{\varphi},\ddot{r},\ddot{\psi},\ddot{\varphi})^T$ dovoljno mali, odnosno, da je $x(t) \in X$, za $0 \leq t \leq T$. Tada možemo predstaviti i $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)$ sa:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_e + \delta\dot{x}(t)\text{, gde je:}$$

$$\delta\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{u=u_o\\ x=x_e}}\delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=u_o\\ x=x_e}}\delta u + h(x_e,u_o,\delta x,\delta u),\ \text{a}$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{u=u_o\\ x=x_e}}$ i $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=u_o\\ x=x_e}}$ su odgovarajući Jacobiani.

Za stohastički modeliranu razliku potpunog i redukovanog modela, uz manje kompenzacije, mogu se sresti redukcije ovog modela u kojima su nelinearni deo i deo modela koji se odnosi na interkonekcije potpuno izostavljeni.

Međutim, za sistematizovan pristup problemu redukcije ovog modela, sistem jednačina (2.4) treba razviti, a zatim primeniti neki od algoritama za redukciju. Pored toga, na osnovu svojstva odsečenog dela modela (razlike orginalnog i redukovanog modela) mogu se odaberu parametri opservera i sistema upravljanja platforme sa senzorima za detekciju cilja, odnosno, detekciju greške praćenja.

2.2. *Schur-ov metod balansiranog odsecanja modela*

Za stabilni sistem G Hankel-ove singularne vrednosti pokazuju respektivnu informaciju o stanju sistema. Otuda, red redukovanog modela $\overline{G}$ može se odrediti ispitivanjem Hankel-vih singularnih vrdnosti sistema σ_i. Model može se redukovati izborom reda i proverom granice ostupanja redukovanog modela ili određivanjem reda modela za odabrano odsupanje, koja mora biti u dozvoljenim granicama. Pri redukciji treba obavezno zadržati antistabilni deo modela sistema, jednostavno odsecanje nestabilnih stanja (ili modova) može dovesti u pitanje realizaciju (egzistenciju) modela sistema

Schur-ov metod balansiranog odsecanja modela garantuje da greška bude ograničena normom $\| G - G_r \|_\infty$ za dobro uslovljen problem redukcije modela [6] [7]:

$$\left\|(G - G_r)\right\|_\infty \leq \varepsilon\text{, gde je } \varepsilon = 2\sum_{i=k+1}^{n}\sigma_i \tag{2.4}$$

a σ_i –i-ta Hankel-ova singularna vrednost

Schur-ov metod dekompozicije je rekurzivan i daje znatna poboljšanja u postupku redukcije sa aspekta opservabilnosti i kontrolabilnosti. Iz tih razloga je ovde i izabran baš ovaj način redukcije modela sa kojim će se poredidti redukcije modela (2.3) *Schur-ovom metodom balansiranog stohastičkog odsecanja*.

2.3. *Balansirano stohastičko odsecanja modela Schur-ovom metodom*

Kao što je u uvodnom delu istaknuto, redukcija modela balansiranim stohastičkim odsecanjem modela Schur-ovom metodom zasniva se na spektralnoj faktorizaciji relativne greške modela, koja zavisi od Hankel-ovih singularnih vrednosti takozvane «fazne matrice» orginalnog sistema [7]. Granica greške se može izračunati na osnovu Hankel-ovih singularnih vrednosti matrice $\boldsymbol{G} := (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ sistema. Za stabilan sistem te vrednosti pokazuju osobine stanja sistema. Otuda, se red redukovanog modela može direktno odrediti ispitivanjem tih vrednosti

Na osnovu frekfentnog odziva, odnosno na osnovu dijagrama Hankel-ovih singularnih vrednosti «fazne matrice» od matrice funkcije prenosa $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, može videti da li je redukcija modela izvodljiva.

Za dobro uslovljene sisteme, tj ukoliko je $G(s)$ kvadratna i D nesingularna, moguće je odrediti spektralni faktor $W(s)$ koji zadovoljava $W^T(-s)W(s) = G(s)G^T(-s)$. Realizaciju ovog faktora u prostoru stanja $W := (A, B_W, C_W, D^T)$ možemo izraziti kao:

$$B_W = PC^T + BD^T$$

$$C_W = D^{-1}(C - B_W^T Q)\,,$$

gde je $\boldsymbol{P}$ Gramian kontrolabilnosti za matricu $\boldsymbol{G}$ dat sa:

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \tag{2.5}$$

i $\boldsymbol{Q}$ je opservabilni Gramian matrice $\boldsymbol{W}$, dobijen kao rešenje Riccati-jeve jednačine:

$$QA + A^TQ + C_W^T C_W = 0 \tag{2.6}$$

Realizacija $\boldsymbol{G}$ u prostoru stanja naziva se balansiranom stohastičkom realizacijom [8] ukoliko je $P = Q = S$ sa $S = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$, gde je σ_i *i*-ta Hankel-ova singularna vrednost stabilnog dela tzv. "fazne matrice"

$$F := (W^T(-s))^{-1} G(s)\,.$$

Računajući sada da je $\boldsymbol{G}$ već stohastički balansirana i sigularne vrednosti uređene u opadajućem nizu, imamo da je

$$S = \begin{bmatrix} S1 & 0 \\ 0 & S2 \end{bmatrix}, \text{ gde je:} \qquad (2.7)$$

$$S1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r), S2 = \mathrm{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \ldots, \sigma_n) \quad \text{i}$$

$$\sigma_r > \sigma_{r+1}\,.$$

Slično tome napišimo i matrice sistema:

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C1 & C2 \end{bmatrix}.$$

Otsečeni model $G_r := (A11, B1, C1, D)$ predstavlja stohastički balansiranu aproksimaciju orginala siatema, koji je stabilan i garantuje da ***granica multiplikativne*** ili ***relativne greške*** bude ograničena normom $\left\| G_r^{-1}(G - G_r) \right\|_\infty$ [7][8], odnosno da je:

$$\left\| G_r^{-1}(G - G_r) \right\|_\infty \le \varepsilon_r\,, \qquad (2.8)$$

gde je:

$$\varepsilon_r = 2 \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\sigma_i}{1 - \sigma_i}\,.$$

σ_i - je Hankel-ova singularna vrednost «fazne matrice».

Da bi se odredila stohastički balasirana realizacija sistema $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ u prostoru stanja, neophodno je da se odredi transformaciona matrica $\boldsymbol{M}$ Gramiana, koji je identičan, dijagonalan i zadovoljava:

$$M^{-1} P M^{-T} = M^T Q M = S\,.$$

Ukoliko podelimo M i M^{-1} saglasno sa $\boldsymbol{S}$ iz relacije (2.7), pri čemu je:

$$M^{-1} := \begin{bmatrix} L \\ V \end{bmatrix}, \qquad M := \begin{bmatrix} T & U \end{bmatrix},$$

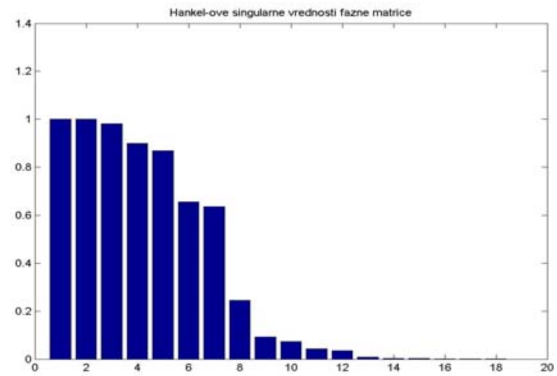
tada su $LT = I_r$ i $Z = TL$, projekcione matrice. Otuda je redukovani sistem G_r dat sa:

$$G_r := (A_r, B_r, C_r, D_r) = (LAT, LB, CT, D)$$

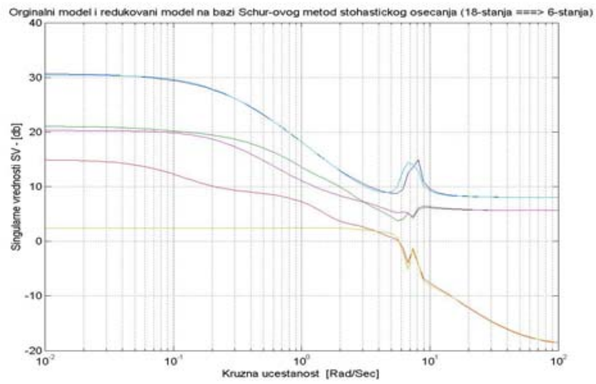
Korišćenjem Schur-ovog metoda dekompozicije matrice u postupcima transformacije prevazilaze se problemi faktorizacije. Zahvaljujući rekurzivnosti, ovaj metod ima i druge numeričke pogodnosti, zbog čega se ovde analizira i predlaže za primenu u postupku redukcije modela datog relacijom (2.3).

3. PRIKAZ REZULTATA REDUKCIJE

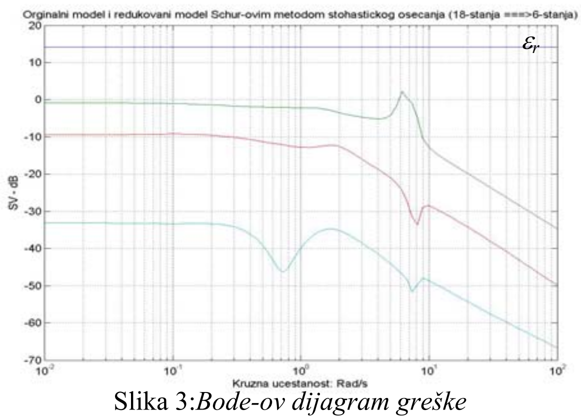
Odgovarajuća interpretacija uslova opservabilnosti i uslova kontrolabilnosti u prostoru stanja data je relacijama (2.6) i (2.5). Polazeći od toga i osobina redukcije modela Schurovom metodom stohastičkog odsecanja urađena je analiza za odabrani model trajektorije cilja u frekventnom domenu. Na slikama koji slede prikazane su singularne vrednosti spektralnog faktora u obliku «bar» dijagrama, singularne vrednosti modela i singularne vrednosti modela greške u frekventnom u posmatranom frekventnom opsegu.



Slika 1: «*Bar*» *dijagram Hankel-ovih singularnih vrednosti «fazne matrice»*



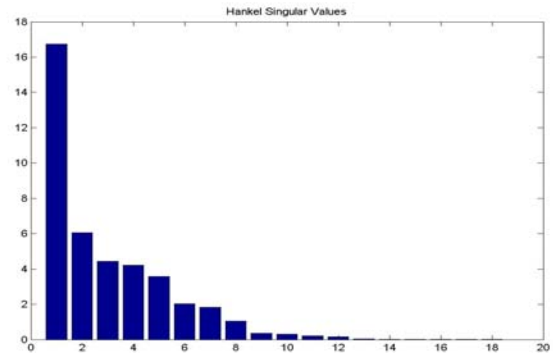
Slika 2: *Bode-ov dijagram singularnih vrednosti*



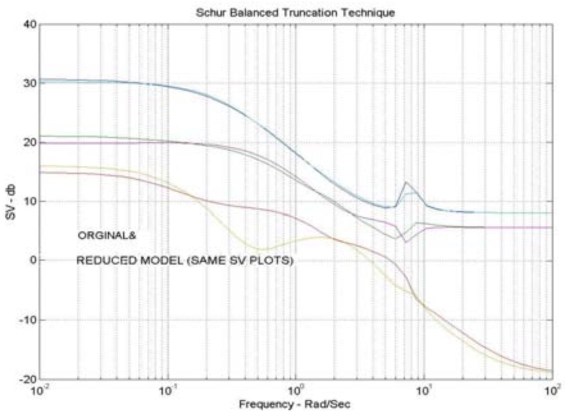
Slika 3:*Bode-ov dijagram greške*

Sa Slike 3 se vidi da je dijagram odstupanja redukovanog modela ravan u frekventnom opsegu koji je od interesa, a što je i glavni rezultata ove metode redukcije.

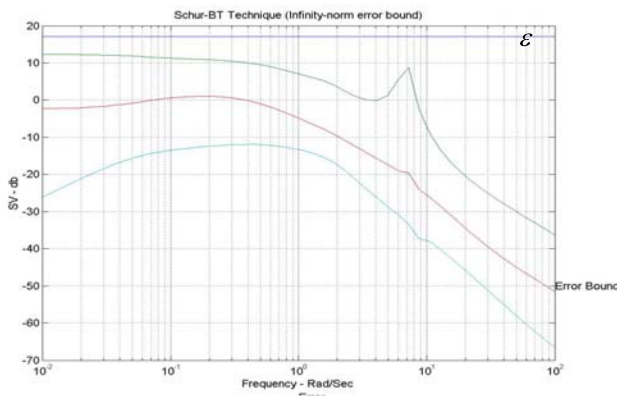
Rezultat redukcije modela metodom odsecanja po kriterijumu apsolutne greške i numeričkim postupkom na bazi Schur-ove dekompozicije matrice prikazan je dijagramima na slikama koje slede.



Slika 4: *«Bar» dijagram singularnih vrednosti*



Slika 5: *Bode-ov dijagram singularnih vrednosti*



Slika 6: *Bode-ov dijagram greške*

Na osnovu prikazanih dijagrama se vidi da Schur-ov metod balansiranog stohastičkog odsecanja daje manju varijaciju greške, u zadatom frekventnom domenu, zbog čega se odstupanje redukovanog modela od stvarnog sistema može aproksimirati stohastičkim modelom greške. Poređenje modela u pogledu relativnog odstupanja $\left\| G_r^{-1}(G - G_r) \right\|_\infty$ i apsolutnog odstupanja $\left\| G - G_r \right\|_\infty$ može se izvesti i tabelarno kako je prikazano u Tabeli 1.

Tabela 1

	Relativna greška	Apsolutna greška
Balansirano stohastičko odsecanja modela	1,070	8,047
Balansirano odsecanja modela	2,168	4,481

Na osnovu tabelarno prikazanih rezultata, kao što je bilo i očekivano, metod balansiranog stohastičkog odsecanja je pokazao bolji rezultat u pogledu relativne greške aproksimacije. S druge strane, metod balansiranja koji je zasnovan na kriterijumu apsolutne greške daje bolji rezultat za apsolutnu grešku. Međutim, kada je bitna uniformnost greške aproksimacije i očuvanje minimalne faze, Schurov metod stohastičkog odsecanja je povoljniji za primenu u odnosu na druge metode redukcije modela.

4. ZAKLJUČAK

Stohastički model greške aproksimacije se pokazao kao veoma efikasan, a primenom Schur-ovog metoda dekompozicije, izbegavaju se inicijalni problemi spektralne faktorizacije matrica u međupostupcima. Korišćenjem ovih pogodnosti može se dobiti efikasan algoritam za primenu u robustizaciji praćenja pokretnog cilja. Na taj način se efikasno realizuje zadatak upravljanja sistemom za praćenje pokretnih ciljeva da se obezbede zahtevane performanse sistema u uslovima: većih varijacija dinamike pokretnog objekta, dejstva neočekivanih perturbacija i odstupanja realne od modelirane dinamike cilja.

LITERATURA

[1] X.R.Li, V.P.Jlkov: "Suvery of Maneuvring Target Tracking, Part I", IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol 39, No.4 October 2003.

[2] S. Blackman and R. Popoli: "Design and Analysis of Modern Tracking Systems", Artech House Boston - London 1999.

[3] S.M.Matić, T.B. Petrović:"IMC Design for an Uncertain Robot Manipulator", J.Aut. Control, Vol. 11(1):1'18, 2001, University of Belgrade

[4] K.Brčić: "Stohastički pristup pojednostavljenju jedne klase multivarijabilnih modela", Zbornik radova XLVI Konf. za Etran, Banja Vrućica, 2002, tom 1

[5] Olfati-Saber: "Global Configuration Stabilization for the VTOL Aircraft with Strong Input Coupling, Internal Report, Reg CDC))-REG 1099 LIDS, MIT 35-49, Cambrige MA o21139 2000

[6] J.M.Maciejowski: "MULTIVARIABLE FEEDBACK DESIGN", Addison Wesley Publishing Company 1989

[7] R.Y. Chiang, M. G. Safonov: "Robust Control Toolbox", MATLAB, **User's Guide,** *Version 2*, 24 Prime Park Way Natick, MA 01760-1500, 1998, http://www.mathworks.com Web

[8] A.Varga "On stochastic balancing related model redukcion", German Aerospace Center, DLR – Oberpfaffenholen Institute of Robotics and Mechatronics D-82234 Wessling, Germany 2003

Abstract – Efficiency of stochastic balanced truncation based on Schur method is discussed in face of performance robustness

BALANCED STOCHASTIC MODEL REDUCTION IN THE FACE OF ROBUST TARGET TRACKING

Krsta Brčić