ПРОРАЧУН ПОДУЖНЕ ОТПОРНОСТИ ВОДОВА ПРИМЕНОМ МЕТОДА ЕКВИВАЛЕНТНЕ ЕЛЕКТРОДЕ

Дијана Г. Борисов, Ненад Н. Цветковић,
Електронски факултет у Нишу, Београдска 14, 18000 Ниш, Србија и Црна Гора

Садржај – *Применом метода еквивалентне елект-роде (МЕЕ), нумерички је одређена подужна отпорност водова различитог попречног пресека проводника.*

1. У В О Д

Метод еквивалентне електроде (МЕЕ) [2] је нов, нумерички метод развијен на Електронском факултету у Нишу, намењен приближном прорачуну потенцијалних поља теоријске физике, укључујући и квазистационарно електромагнетно поље.

Предложени метод заснован је на идеји да се електрода произвољног облика замени еквивале-нтним системом састављеним од коначног броја тзв. еквивалентних електрода (ЕЕ), након чега се одређују остале величине од интереса [2]. Тако се анализа посматраног електродног система своди на решавање већег броја лакше решивих пробема.

Када се електродни систем састоји од већег броја електрода или је смештен у слојевитој среди-ни, погодно је у неким случајевима користити Гринове функције за поједине електроде, односно слојевите средине, док се остале електроде система замењују помоћу ЕЕ.

За прорачун подужне отпорности водова помоћу МЕЕ примењује се поступак предложен у [3]. Поменута процедура заснована је примени пертурбаци-оне технике, при чему се полази од израза за снагу Хулових губитака у водовима.

Анализирани су оклопљени и прорезани водови различитог попречног пресека проводника. При томе су, применом МЕЕ, одговарајући електродни си-стеми, формирани уз, односно без коришћења Гринових функција за поједине електроде.

2.1. ПРИМЕНА МЕЕ

Прорачун подужних отпорности водова помоћу МЕЕ биће описан на примеру ваздушног коаксијалног вода (Сл.1). При томе се сматра да је напон између електрода U (потенцијал кошуљице је V_k, а проводника $V_k + U$).

У посматраном примеру, ЕЕ могу се образовати само у односу на унутрашњи проводник коаксијал-ног вода, а утицај кошуљице узети у обзир приме-ном теореме лика у цилиндричном огледалу које се поклапа са површином кошуљице, Сл.2а. Тако је потенцијал

$$\varphi = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 N} \ln \frac{b^{2N} - 2(a\,r)^N \cos(N\theta) + (a\,r/b)^{2N}}{a^{2N} - 2(a\,r)^N \cos(N\theta) + r^{2N}}, \quad (1)$$

где су:

- r і θ цилиндричне координате, а координатни систем постављен тако да се површина унутраш-њег проводника, односно кошуљице, поклапају са координатним површинама $r = a$ і $r = b$;

- N је број ЕЕ које су равномерно постављене по површини унутрашњег проводника тако да су осе ЕЕ налазе на местима $r = a$, $\theta = \theta_n = 2\pi(n-1)/N$, $n = 1, 2, ..., N$, док је

- q' је подужно наелектрисање ЕЕ, а $Q' = N\,q'$ укупно подужно наелектрисање унутрашњег проводника.

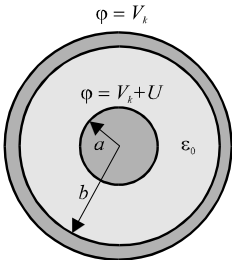
Полупречници ЕЕ су $a_e = a \sin(\pi/2N)$.

За радијалну, E_r и угаону, E_θ компоненту век-тора јачине електричног поља добија се [2]

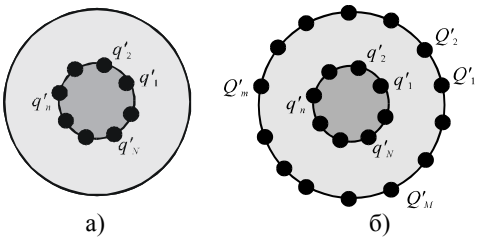
$$E_r = E\left[\frac{1-(a/r)^N \cos(N\theta)}{1-2(a/r)^N \cos(N\theta)+(a/r)^{2N}} - \right.$$
$$\left. - \frac{(ar/b^2)^{2N} - (ar/b^2)^N \cos(N\theta)}{1-2(ar/b^2)^N \cos(N\theta)+(ar/b^2)^{2N}}\right] \text{ и } \quad (2a)$$

$$E_\theta = E \sin(N\theta)\left[\frac{1}{(a/r)^N - 2\cos(N\theta)+(r/a)^N} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(b^2/ar)^N - 2\cos(N\theta)+(ar/b^2)^N}\right], \quad (2b)$$

где је $\boldsymbol{E} = E\,\hat{r}, E = \dfrac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}$, тачна вредност за радијалну компоненту вектора електричног поља.



Сл. 1. *Коаксијални вод.*



Сл. 2. *Примена МЕЕ.*

МЕЕ се може применити и тако да се и проводник и кошуљица замене системом ЕЕ (Сл.2б). Еквивалентни

кавезасти електродни систем формира се тако што се унутрашњи проводник замењује са N цилиндричних ЕЕ, полупречника $a\sin(\pi/2N)$, оптерећених подужним наелектрисањима q'_n, при чему се осе еквивалентних електрода налазе у та-чкама $r = a$ ⊥ $\theta = \theta_n = (2n-1)\frac{\pi}{N}$, $n = 1, 2, ..., N$. На сличан начин, кошуљица се замењује са M цилиндричних ЕЕ, полупречника $b\sin(\pi/2M)$, подужних оптерећења Q'_m и оса смештених у тачкама $r = b$ и $\theta = \theta_m = (2m-1)\frac{\pi}{M}$, $m = 1, 2, ..., M$.

Потенцијал овако образованог система је

$$\varphi = \sum_{n=1}^{N} q'_n G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_n}) + \sum_{m=1}^{M} Q'_m G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_m}) + \varphi_0, \qquad (3)$$

где је $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/2\pi\varepsilon_0$ Гринова функција усамљеног сталног праволинијског подужног оптерећења велике дужине. Са $\boldsymbol{r}$ је означен вектор положаја тачке у којој се одређује потенцијал, $\boldsymbol{r}'$ је вектор положаја правца на ком се налази подужно наелектрисања, док је φ_0 адитивна константа.

Непозната подужна оптерећења еквивалентних електрода (укупно $M + N$) су решења система линеарних једначина, формираног на основу граничног услова за потенцијал проводника и кошуљице. При томе се користи теорија логаритамских потенцијала. Адитивна константа φ_0 одређује се из услова да је алгебарска сума свих подужних оптерећења једнака нули, тј.

$$\sum_{n=1}^{N} q'_n + \sum_{m=1}^{M} Q'_m = 0. \qquad (4)$$

Применом петурбационе технике, предложене и детаљно описане у [3], развијена је процедура за одређивање подужне отпорности, R', водова помо-ћу МЕЕ. При томе се полази од израза за снагу Ху-лових губитака,

$$R' I I^* = \oint_{C_1} R_S H_t H_t^* \, \mathrm{d}l + \oint_{C_2} R_S H_t H_t^* \, \mathrm{d}l, \qquad (5)$$

где је $R_S = \sqrt{\pi\mu f/\sigma}$ [1] површинска отпорност материјала од којег су начињени проводници (μ и σ су магнетна пропустљивост, односно специфична проводност материјала, док је f фреквенција). Са H_t означена је тангенцијална компонента магнетног поља, док је I струја кроз проводнике вода. Чланови на десној страни израза (5) представљају подужну снагу Хулових губитака у проводнику (први члан) и кошуљици (други члан). При томе су C_1 и C_2 контуре на које се ослања попречни пресек унутрашњег проводника (C_1) и кошуљице (C_2).

Како се код примене МЕЕ површинска густина наелектрисања на површини електроде може израчунати као $\eta = q'_n / l_n$, где је q'_n подужно наелект-рисање n-те ЕЕ, а l_n ширина тракастог дела електроде који замењује n-та ЕЕ [2], то се за интензитет електричног поља, на површини електроде до-бија

$$E = \eta/\varepsilon = q'_n / l_n \varepsilon. \qquad (6)$$

Комбинацијом израза (5) и (6) са релацијама $I = q'/\sqrt{\varepsilon\mu}$ и $E/H = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, добија се за случај коаксијалног вода са Сл. 1, када се и кошуљица и проводник замењују системом ЕЕ (Сл. 2б),

$$R'\left(\sum_{n=1}^{N} q'_n\right)^2 = R_S \sum_{n=1}^{N} \frac{q'^2_n}{l_n} + R_S \sum_{m=1}^{M} \frac{Q'^2_m}{l_m}. \qquad (7)$$

Када се МЕЕ примењује уз коришћење Гринове функције (Сл. 2а), интензитет електричног поља на површини проводника одређује се као $\boldsymbol{E} = -grad\varphi$. Након што се тангенцијална компонента магнетног поља одреди као $H_t = E\sqrt{\varepsilon/\mu}$, из израза (5) се добија

$$R'\left(2\sum_{n=1}^{N} q'_n\right)^2 = 2R_S \sum_{n=1}^{N} \frac{q'^2_n}{l_n} + \sqrt{\mu\varepsilon} \oint_{C_1} R_S |H_t|^2 \, \mathrm{d}l. \qquad (8)$$

Из претходна два израза може се одредити подужна отпорност коаксијалног вода R', при чему се вредност интеграла у изразу (8) одређује нумерички.

Таблица 1

b/a	тач. вр.	I	II
1.1	0.303841255	0.303841255	0.303841255
1.2	0.291784062	0.291784062	0.291784062
1.3	0.281581822	0.281581822	0.281581822
1.4	0.272837045	0.272837045	0.272837045
1.5	0.265258238	0.265258238	0.265258238
2.0	0.238732415	0.238732415	0.238732415
2.5	0.222816920	0.222816920	0.222816920
3.0	0.212206591	0.212206591	0.212206591
4.0	0.198943679	0.198943679	0.198943679
5.0	0.190985932	0.190985932	0.190985932
6.0	0.185680767	0.185680767	0.185680767
7.0	0.181891364	0.181891364	0.181891364
8.0	0.179049311	0.179049311	0.179049311
9.0	0.176838826	0.176838826	0.176838826
10.0	0.175070437	0.175070437	0.175070437

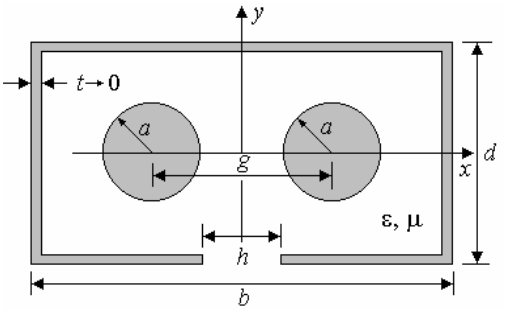
Вредности нормализоване подужне отпорности aR'/R_S вода са Сл 1. одређене применом МЕЕ уз, односно без коришћења Гринове функције дате су у колони I, односно II, **Таблице** 1. Тачне вредности за подужну отпорност приказане у **Таблици** 1, добијене су помоћу аналитичког израза [1],

$$R' = \frac{R_S}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \qquad (9) \quad (9)$$

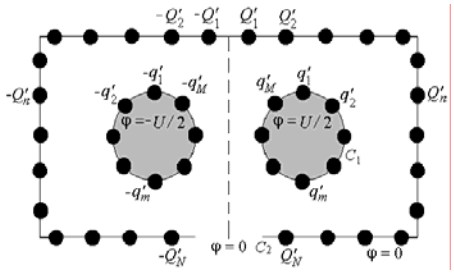
3. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ

Помоћу описаног поступка одређена је подужна отпорност двожичног вода, кружног попречног пресека

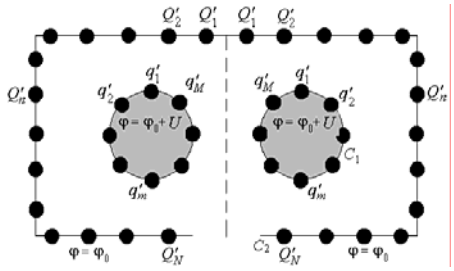
проводника, смештеног у прорезану правоугаону кошуљицу (Сл.3). Примена МЕЕ (без коришће-ња Гринове функције) за симетрични, односно аси-метрични режим, илустрована је на Сл. 4а-б). На Сл. 5. приказане су еквипотенцијалне површине у симетричном режиму.



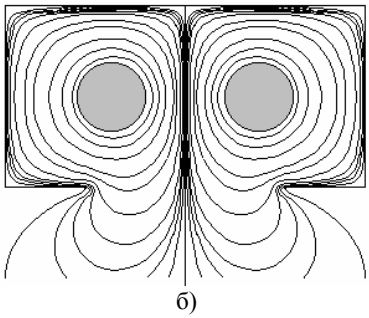
Сл.3. *Оклопљени двожични вод са прорезаном правоугаоном кошуљицом.*



Сл. 4а. *Примена МЕЕ за симетричан режим.*



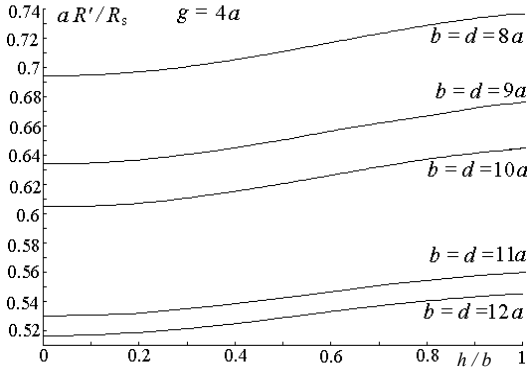
Сл. 4б. *Примена МЕЕ за асиметричан режим.*



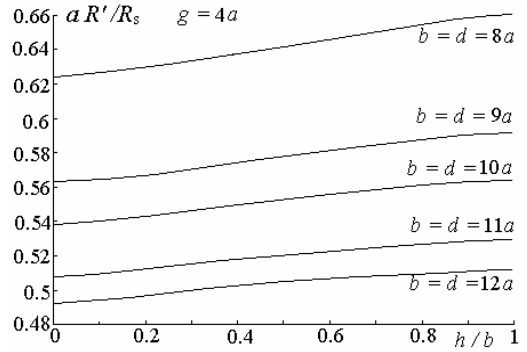
б)

Сл.5. *Еквипотенцијалне површине у прорезаном оклопљеном двожичном воду за симетричан режим.*

Промена нормализоване подужне отпорности вода са Сл. 3 у функцији ширине прореза за симетри-чни и асиметрични режим на воду приказана је на Сл. 6, односно Сл. 7.

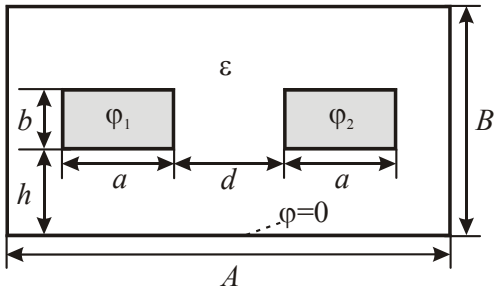


Сл.6. *Подужна отпорност за симетрични режим.*



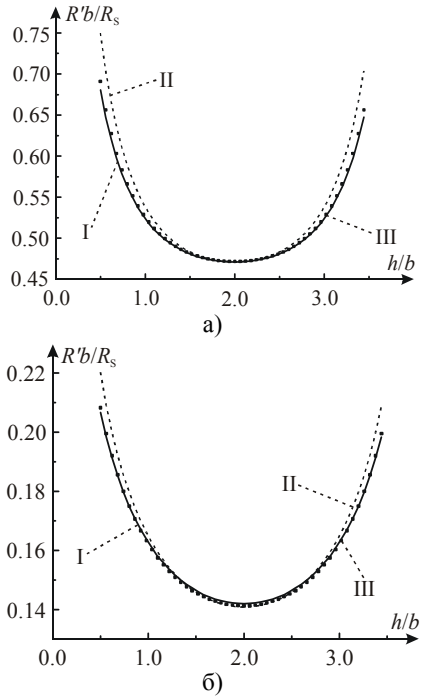
Сл.7. *Подужна отпорност за асиметрични режим.*

Промена подужне отпорности оклопљеног вода са проводницима правоугаоног попречног пресека (Сл. 8) у односа h/b, приказана је на Сл. 9а-б. При томе је разматран симетрични ($\varphi_1 = U, \varphi_2 = -U$) и аси-метрични ($\varphi_1 = \varphi_2 = U$) режим на воду. МЕЕ при-мењен је без и уз коришћење Гринове функције за подужно наелектрисање предложену у [8]. Вредности до-бијене применом МЕЕ и Гринове функције означене су пуном линијом (I), док су вредности одређене директном применом МЕЕ без коришћења Гринове функције за различити број ЕЕ означене испрекиданом линијом (II и III). Може се уочити ве-ома добро слагање резултата добијених на један и други начин, при чему је разлика из-међу њих утолико мања, уколико је број ЕЕ већи.

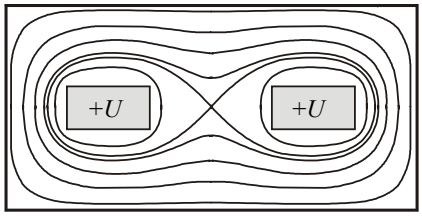


Сл. 8. *Оклопљени двожични вод.*

Еквипотенцијалне површине за асиметричан режим у воду са Сл. 8, приказане су на Сл. 10.



Сл. 9. *Подужна отпорност за а) симетричан режим и б) асиметричан режим.*



б)

Сл.10. *Еквипотенцијалне површине за асиметричан режим.*

4. ЗАКЉУЧАК

Применом метода еквивалентне електроде од-ређена је подужна отпорност оклопљених и проре-заних водова кружног и правоугаоног попречног пресека проводника, смештених у правоугаону ко-шуљицу. Разматран је симетрични и асиметрични режим, а сам метод МЕЕ је примењен са и без ко-ришћења Гринове функције. Примењени нумерички метод даје изузетно добро слагање са резултатима добијеним помоћу аналитичких израза, тамо где они постоје.

OLWHUDWXUD

[1] J. B. Сурутка: *Електромагнетика*, Грађевинска књига, Београд, 1989, стр. 494, 502-503

[2] D. M. Veličković: *Equivalent Electrodes Method*, *Scientific Review*, pp. 207-248, Belgrade, 1996.

[3] D. M. Veli£kovi¢: *TEM Analysis of Transmission Lines Using Equivalent Electrodes Method*, 3rd International Conference TELSIKS '97, Ni~, Yugoslavia, October 8-10., 1997, Proceedings of Papers, p.p. 64-73

[4] D. M. Veličković, Ž. J. Mančić, D. G. Zulkić: *Axial Slit on Two Wire Line with Rectangular Shield*, Analele Universitatii din Oradea, Fascicola ELECTROTEHNICA, pp. 18-23, Felix-Spa, Romania, May 27-30 1998.

[7] D. M. Veličković, Ž. J. Mančić, D. G. Zulkić: *Axial Rectangular Coax with Axial Slit and with Rectangular or Circular Center Conductor*, International Symposium on Electromagnetic Compatibility EMC'98 ROMA, pp. 384-389, Rome, Italy, September 14-18 1998.

[8] D. M. Veli£kovi¢: *Line Charge in Rectangular Shield*, 8th International IGTE Symposium, Graz, Austria, September 21-24, 1998, Proceedings of Papers, p.p. 327-330

[9] Д. М. Величковић, С. С. Илић, Д. Г. Зулкић: *Еле-ктромагнетно поље прорезаних оклопљених водова са кошуљицама правоугаоног попречног пресека,* Зборник реферата са Пете међународне конференције железничких стручњака ЈУ-ЖЕЛ'98, стр. 116-119, Врњачка бања, 28-30. октобар 1998.

[10] D M. Veličković, N. N. Cvetković, I. Mladenović, *Potential and electric field strength calculation of bus-bars*, First Conference on Electrical Engineering & Electronics-EE '98, Gabrovo, Bulgaria, December 3-5, 1998, Proceedings, pp 37-42

[11] Н. Н. Цветковић, Д. М. Величковић: *Оклопљени водови са проводницима правоугаоног попречног пресека*, XLIII Конференција ЕТРАН, Златибор, 20-23. септембра 1999. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 176-179

[12] D. M. Veli£kovi¢, N. N. Cvetkovi¢: *Three-wire shielded lines with rectangular cross-section*, International Conference on Applied and Theoretical Electricity-ICATE 2000, Craiova, Romania, May 25-26, 2000, Proceedings, p.p 17-22

[13] Н. Н. Цветковић: *Оклопљени двожични водови правоугаоног попречног пресека проводника*, XLIV Конференција ЕТРАН, Сокобања, 26-29. јун, 2000. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 218-221

[14] Н. Н. Цветковић: *Прорачун водова полигоналног попречног пресека*, магистарска теза, Еле-ктронски факултет у Нишу, фебруар 2002.

[15] Д. Г. Зулкић: *Електромагнетно поље прореза-них коаксијалних водова у тунелима, мостови-ма и рударским окнима*, магистарска теза, Еле-ктронски факултет у Нишу, март 2002.

Abstract – The approximate calculation of the resistance per unit length of shielded lines with or without slit, having conductors of different cross section is presented. By that, the equivalent electrodes method is used. Both, symmetric and asymmetric regime are obtained. The equipotential and equienergetic curves are also plotted.

CALCULATION OF LINES RESISTANCE PER UNIT LENTH USING EQUIVALENT ELECTRODES METHOD

Dijana G. Borisov, Nenad N. Cvetković