XLV KONFERENCIJA ZA ETRAN, BUKOVIČKA BANJA, 4 – 7. JUNA, 2001.

ПОРЕЂЕЊЕ RLS АЛГОРИТМА И АЛГОРИТМА ЗАСНОВАНОГ НА SVD ЗА ОБЛИКОВАЊЕ ДИЈАГРАМА ЗРАЧЕЊА АНТЕНСКОГ НИЗА НА БАЗНОЈ СТАНИЦИ

Иван Покрајац, *ВП 4522 Батајница*
Милан Шуњеварић, *СМО СВПД УИРП НВО, Београд*
Бојан Зрнић, *Војнотехничка академија ВЈ, Београд*

Садржај – *У овом раду дато је поређење два адаптивна алгоритма за примене у мобилним комуникацијама. Анализиране су перформансе RLS (Recursive Least Square) алгоритма и алгоритма заснованог на декомпозицији аутокорелационе матрице на њене својствене вредности (Singular Value Decomposition – SVD).*

1. УВОД

У савременим мобилним комуникационим системима са CDMA приступом, један од начина уобличавања дијаграма зрачења антенског низа заснива се на коришћењу адаптивних алгоритама. Тежински коефицијенти антенског низа могу се подесити тако да се минимизује средње квадратна грешка између сигнала на излазу антенског низа и референтног сигнала.

У раду који се бави применом адаптивних антенских низова у мобилним комуникационим системима [1], RLS алгоритам за обликовање дијаграма зрачења се показао као алгоритам који даје најбоље вредности излазног односа сигнал/(шум + сметња), $SNIR_{iz}$, у односу на друге адаптивне алгоритме (LMS, SMI).

У овом раду упоређени су резултати које дају RLS алгоритам и алгоритам заснован на SVD процедури. Перформансе ова два адаптивна алгоритма анализиране су преко параметра $SNIR_{iz}$, у зависности од вредности параметра $SNIR_{ul}$. Такође приказана је и зависност параметра $SNIR_{iz}$ од броја итерација за оба алгоритма.

2. АДАПТИВНИ АЛГОРИТМИ ЗА ОБЛИКОВАЊЕ ДИЈАГРАМА ЗРАЧЕЊА

У адаптивној обради сигнала, оптимална вредност вектора тежинских коефицијената антенског низа $\mathbf{w}$ добија се решавањем система једначина у нормалној форми, који је дат следећим изразом [2]:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}, \tag{1}$$

где је $\mathbf{R}$ аутокорелациона матрица која је одређена изразом :

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\cdot \mathbf{x}^H(n)\}, \tag{2}$$

у коме су са вектором $\mathbf{x}(n)$ приказани одбирци сигнала на излазу елемената антенског низа у тренутку n, а са $(.)^H$ Хермитски оператор. Вектор унакрсних корелација вектора $\mathbf{x}(n)$ и вектора одбирака референтног сигнала $r(n)$ дат је изразом:

$$\mathbf{p} = E\{\mathbf{x}(n)\cdot r(n)\}. \tag{3}$$

Међутим, ово се решење углавном не користи у пракси, због честе немогућности израчунавања инверзне аутокорелационе матрице $\mathbf{R}^{-1}$, поготово у случајевима када је детерминанта матрице $\mathbf{R}$ блиска или једнака нули. Зато се у пракси уместо директног решавања система једначина, користи рекурзивни метод у циљу елиминисања потребе за инвертовањем аутокорелационе матрице $\mathbf{R}$. Један од представника рекурзивних адаптивних алгоритама је и RLS алгоритам.

RLS алгоритам

Због немогућности познавања праве вредности матрице $\mathbf{R}$, врши се њена процена и ажурирање помоћу следећег израза [2]:

$$\mathbf{R}(n) = \delta(n)\cdot \mathbf{R}(n-1) + \mathbf{x}(n)\cdot \mathbf{x}^H(n) = \sum_{k=0}^{n}\delta^{n-k}(n)\cdot \mathbf{x}(k)\cdot \mathbf{x}^H(k) \tag{4}$$

где је $\delta(n)$ "фактор заборављања", чија је вредност блиска јединици. Да би се обезбедила бржа конвергенција вредност овог параметра се може мењати у свакој итерацији по следећем обрасцу [3]:

$$\delta(n) = \delta_0\cdot\delta(n-1) + (1-\delta_0) \tag{5}$$

где је $\delta_0 = 0.99$ а $\delta(0) = 0.96$.

Како је за одређивање вредности вектора тежинских коефицијената потребно извршити инверзију матрице $\mathbf{R}$, користи се лема о инверзији матрица, за добијање вредности матрице $\mathbf{R}^{-1}$:

$$\mathbf{R}^{-1}(n) = \frac{1}{\delta(n)}\cdot\mathbf{R}^{-1}(n-1) - \frac{1}{\delta(n)}\cdot\frac{\mathbf{R}^{-1}(n-1)\cdot\mathbf{x}(n)\cdot\mathbf{x}^H(n)\cdot\mathbf{R}^{-1}(n-1)}{\delta(n)+\mathbf{x}^H(n)\cdot\mathbf{R}^{-1}(n-1)\cdot\mathbf{x}(n-1)} \tag{6}$$

Почетна вредност матрице $\mathbf{R}^{-1}$ је одређена изразом:

$$\mathbf{R}^{-1}(0) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathbf{I}. \tag{7}$$

где је ε позитивна константа већа од један, а $\mathbf{I}$ јединична матрица. На овај начин добија се израз за одређивање вредности матрице $\mathbf{R}^{-1}$ и њено ажурирање у сваком новом тренутку.

Вредност тежинских коефицијената у тренутку n добија се помоћу израза [4]:

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)\cdot\alpha^*(n). \tag{8}$$

где је са $\mathbf{k}(n)$ означен вектор појачања и дат је следећим изразом:

$$\mathbf{k}(n)=\frac{\frac{1}{\delta(n)}\cdot\mathbf{R}^{-1}(n-1)\cdot\mathbf{x}(n)}{1+\frac{1}{\delta(n)}\cdot\mathbf{x}^{H}(n)\cdot\mathbf{R}^{-1}(n-1)\cdot\mathbf{x}(n)}, \qquad (9)$$

а $\alpha(n)$ је процена априорне грешке у тренутку n, и дата је изразом:

$$\alpha(n)=r(n)-\mathbf{w}^{H}(n)\cdot\mathbf{x}(n) \qquad (10)$$

Алгоритам заснован на SVD

Декомпозиција матрице на њене својствене вредности је један од алгоритама из нумеричке алгебре за обезбеђивање информација о структури система линеарних једначина. Ако су матрице $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y}$ две јединствене матрице такве да је:

$$\mathbf{Y}^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\sum & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad (11)$$

где је ранг матрице $\mathbf{R}$ означен са W, онда је теорема о декомпозицији матрице на њене сингуларне (сопствене) вредности дата изразом (11) [2], где је:

$$\sum=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_W), \qquad (12)$$

уз услов да за сопствене вредности λ важи

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq\cdots\geq\lambda_W>0. \qquad (13)$$

Ако израз за одређивање вредности тежинских коефицијената антенског низа помножимо са обе стране са матрицом $\mathbf{R}^{H}$ добијамо следећи израз:

$$\mathbf{R}^{H}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{R}^{H}\cdot\mathbf{p}, \qquad (14)$$

односно

$$\mathbf{w}=\left(\mathbf{R}^{H}\cdot\mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{R}^{H}\cdot\mathbf{p}. \qquad (15)$$

Како је матрица $\mathbf{R}^{H}\cdot\mathbf{R}$ димензија $M\times M$ Хермитска и ненегативно дефинисана, њене сопствене вредности су реалне и ненегативне и означене су са $\lambda_1^2,\lambda_2^2,...,\lambda_M^2$, где је $\lambda_1\geq\lambda_2\geq...\geq\lambda_W>0$ а $\lambda_{W+1}=\lambda_{W+2}=...=\lambda_M=0$. Са $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_M$ означен је скуп ортогоналних сопствених вектора матрице $\mathbf{R}^{H}\cdot\mathbf{R}$, којима одговарају сопствене вредности $\lambda_1^2,\lambda_2^2,...,\lambda_M^2$, респективно. Ако је $\mathbf{Z}$ матрица димензија $M\times M$ чије су колоне сопствени вектори $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_M$, онда користећи сопствене вредности и сопствене векторе, декомпозиција матрице $\mathbf{R}^{H}\mathbf{R}$ се може дати следећим изразом:

$$\mathbf{Z}^{H}\mathbf{R}^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\sum^{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Матрицу $\mathbf{Z}$ можемо да поделимо на две матрице $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ тако да је $\mathbf{Z}=[\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2]$, где је $\mathbf{Z}_1$ матрица димензија $M\times W$ дата изразом:

$$\mathbf{Z}_1=[\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_W], \qquad (17)$$

а $\mathbf{Z}_2$ је матрица димензија $M\times(M-W)$ дата следећим изразом:

$$\mathbf{Z}_2=[\mathbf{z}_{W+1},\mathbf{z}_{W+2},...,\mathbf{z}_M], \qquad (18)$$

тако да је $\mathbf{Z}_1^{H}\mathbf{Z}_2=\mathbf{0}$. На основу претходних израза могу се направити два закључка. Прво, за матрицу $\mathbf{Z}_1$ важи да је:

$$\mathbf{Z}_1^{H}\mathbf{R}^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_1=\sum^{2}, \qquad (19)$$

односно:

$$\sum^{-1}\mathbf{Z}_1^{H}\mathbf{R}^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_1\sum^{-1}=\mathbf{I}, \qquad (20)$$

а за матрицу $\mathbf{Z}_2$ важи да је:

$$\mathbf{Z}_2^{H}\mathbf{R}^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_2=\mathbf{0} \qquad (21)$$

односно:

$$\mathbf{R}\mathbf{Z}_2=\mathbf{0}. \qquad (22)$$

Ако се уведе нова матрица $\mathbf{Y}_1$ димензија $M\times W$ тако да је:

$$\mathbf{Y}_1=\mathbf{R}\mathbf{Z}_1\sum^{-1}, \qquad (23)$$

онда на основу израза (20) следи да је:

$$\mathbf{Y}_1^{H}\mathbf{Y}_1=\mathbf{I}. \qquad (24)$$

што значи да су колоне матрице $\mathbf{Y}_1$ ортогоналне једна на другу. Ако се уведе матрица $\mathbf{Y}_2$ димензија $M\times(M-W)$, онда се може формирати јединствена матрица $\mathbf{Y}$ од матрица $\mathbf{Y}_1$ и $\mathbf{Y}_2$ димензија $M\times M$ тако да је $\mathbf{Y}=[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2]$ и $\mathbf{Y}_1^{H}\mathbf{Y}_2=\mathbf{0}$. На основу претходних израза, израз (11) се може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}&=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1^{H}\\ \mathbf{Y}_2^{H}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{R}\cdot[\mathbf{Z}_1\quad\mathbf{Z}_2]\\&=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Y}_1^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Y}_2^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Y}_2^{H}\mathbf{R}\mathbf{Z}_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\left(\sum^{-1}\mathbf{Z}_1^{H}\mathbf{R}^{H}\right)\mathbf{R}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Y}_1^{H}(\mathbf{0})\\ \mathbf{Y}_2^{H}\left(\mathbf{Y}_1\sum\right) & \mathbf{Y}_2^{H}(\mathbf{0})\end{bmatrix},\\&=\begin{bmatrix}\sum & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (25)$$

чиме је и доказана теорема о декомпозицији матрице на њене сингуларне вредности.

Ако је извршена декомпозиција матрице $\mathbf{R}^H \cdot \mathbf{R}$, онда се њена инверзна матрица може добити следећим изразом:

$$\left(\mathbf{R}^H\mathbf{R}\right)^{-1} = \mathbf{Z}_1 \sum{}^{-2} \mathbf{X}_1^H, \qquad (26)$$

док се матрица $\mathbf{R}^H$ може изразити у следећем облику:

$$\mathbf{R}^H = \mathbf{Z}_1 \sum \mathbf{Y}_1^H. \qquad (27)$$

Ако изразе (26) и (27) убрстимо у израз (15) добијамо крајњи израз за израчунавање вектора тежинских коефицијената антенског низа [2]:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \left(\mathbf{Z}_1 \sum{}^{-2} \mathbf{X}_1^H\right)\left(\mathbf{Z}_1 \sum \mathbf{Y}_1^H\right) \cdot \mathbf{p} \\ &= \mathbf{Z}_1 \sum{}^{-1} \mathbf{Y}_1^H \cdot \mathbf{p} \qquad\qquad , \qquad (28) \\ &= \mathbf{Z}\begin{bmatrix} \sum^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{Y}^H \cdot \mathbf{p}\end{aligned}$$

где је $\sum{}^{-1} = diag\left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_W^{-1}\right)$.

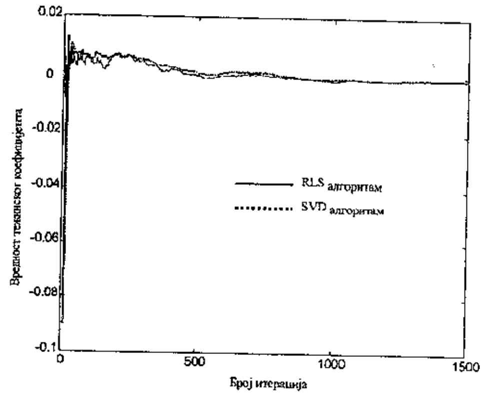
Код овог алгоритма у сваком тренутку одабирања сигнала вршиће се декомпозиција матрице $\mathbf{R}(n)^H \cdot \mathbf{R}(n)$, добијене матрице $\mathbf{Y}(n)$, $\mathbf{Z}(n)$ и $\sum(n)$ служиће за израчунавање тежинских коефицијената $\mathbf{w}(n)$.

3. РЕЗУЛТАТИ СИМУЛАЦИЈЕ

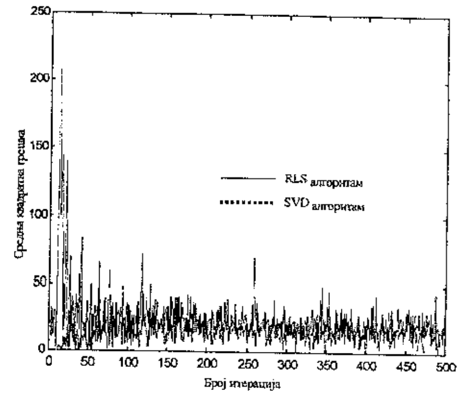
У формирању симулационог модела претпостављено је да имамо једну мобилну станицу која емитује сигнал према базној станици и да се тај сигнал рефлектује од околних објеката према Lee'evom моделу расподеле угла доласка (AOA, Angle of arrival) на базну станицу [4]. Коришћени су широко појасни сигнали (пренос у проширеном спектру) са процесним појачањем G=500. Коришћен је симулациони модел са дванаесто-елементним адаптивним антенским низом заснован на примени адаптивних алгоритама и референтног сигнала [5].

Анализиране су перформансе адаптивног антенског низа на базној станици, када се уобличавање дијаграма зрачења остварује применом једног од претходно описаних алгоритама.

На сл.1а је приказана зависност тежинског коефицијента првог елемента антенског низа од броја итерација алгоритма. Са слике се види да тежински коефицијенти конвергирају истом брзином ка својим оптималним вредностима за оба наведена алгоритма. На сл.1б приказана је средња квадратна грешка између референтног сигнала и сигнала на излазу антенског низа. Може се закључити да средња квадратна грешка за оба алгоритма достиже минималну вредност за приближно исто време.

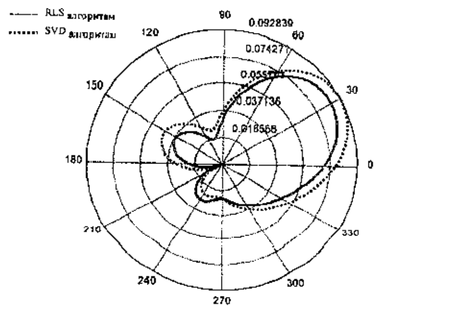


а)



б)

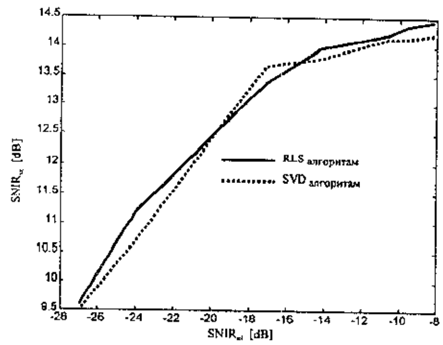
Слика1 *а) процењена вредност тежинског коефицијента са првог елемента антенског низа, б) средња квадратна грешка између референтног сигнала и излаза антенског низа*



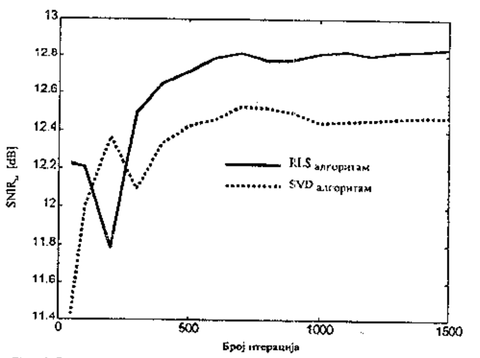
Сл.2 *Дијаграм зрачења антенског низа после 1000 итерација алгоритма*

На сл.2 је приказан дијаграм зрачења антенског низа при вредности параметра $SNIR_{ul}$= -20 dB, број рефлектованих сигнала је L=21 а ширина угаоне области унутар које долазе рефлектовани сигнали Θ_{BW}=5°.

Такође је одређена и вредност параметра $SNIR_{iz}$ у зависности од параметра $SNIR_{ul}$ за оба алгоритма. Са сл.3 се види да оба алгоритма дају приближно исту вредност параметра $SNIR_{iz}$. На крају је приказана и зависност параметра $SNIR_{iz}$ од броја итерација алгоритма при вредности параметра $SNIR_{ul}$=-20 dB. Са сл.4 се може закључити да RLS алгоритам даје бољу вредност параметра за 0.3 dB, од алгоритма заснованог на SVD.



Сл.3 *Зависност параметра $SNIR_{iz}$ од параметра $SNIR_{ul}$*



Сл.4 *Зависност параметра $SNIR_{iz}$ од броја итерација алгоритма при вредности параметра $SNIR_{ul}$*=-20 dB

4. ЗАКЉУЧАК

Из приказаних резултата може се закључити да оба наведена алгоритма дају приближно исте карактеристике. Брзина конвергенције тежинских коефицијената антенског низа код оба алгоритма је иста, при чему је алгоритам заснован на SVD нумерички сложенији од RLS алгоритма. RLS алгоритам даје нешто бољу вредност параметра $SNIR_{iz}$ у односу на SVD алгоритам.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И.Покрајац, М.Шуњеварић, Б.Зрнић и Д.Бачевић, "Утицај различитих модела преносног канала на излазне карактеристике мобилног комуникационог система са адаптивном антенском карактеристиком", *Научно технички преглед,* рад прихваћен за објављивање у 2001.год..

[2] S.Haykin, "*Adaptive filter Theory*",Prentice Hall, New Jersey, 1986.

[3] L.Ljung, T.Soderstron, " *Theory and Practice of Recursive Identification*", The MIT Press, London, 1983.

[4] L.C.Godara, "Applications of Antenna Arrays Mobile Communications", *In Prooc. IEEE,* July 1997, vol.88, pp.1029-1060.

[5] М.Шуњеварић, И.Покрајац и Б.Зрнић "Анализа перформанси различитих антенских низова у мобилним комуникацијама", *Зборник радова са VII Телекомуникационог форума,* ТЕЛФОР 99, стр.178 - 181, 1999.

Abstract – In this paper performance of the RLS and SVD algorithms for beam forming in the mobile communication antenna array system are compared. $SNIR_{out}$ was used as the antenna system performance measure. Computation effectiveness was estimated by $SNIR_{out}$ determination in dependence of number of iterations.

COMPARISON OF THE RLS AND SVD ALGORITHMS FOR BEAMFORMING IN THE MOBILE COMMUNICATION SYSTEM

Иван Покрајац, Милан Шуњеварић , Бојан Зрнић