ОСОБИНЕ КЛАТЕРА И АНАЛИТИЧКО МОДЕЛОВАЊЕ ВЕЈБУЛОВОГ КЛАТЕРА

Миленко Андрић, *Војнотехничка академија ВЈ*, Ратка Ресановића 1, 11000 Београд
Алекса Зејак, *Институт ИМТЕЛ*, Бул. М. Пупина 165-Б, 11070 Н. *Београд; zejak@zorni.com*

Садржај - *Пријем радарских сигнала се увек обавља у присуству различитих врста шумова. Појам и особине клатера као врсте шума су наведене у овом раду. У складу са експерименталним резултатима, Вејбулов (Weibull) модел клатера се може сматрати универзалним моделом и може се користити за шири дијапазон услова. У раду је предложен аналитички модел Вејбуловог клатера и изведена нелинеарна повезаност између аутокорелационих секвенци комплексне Гаусове (Gaussian) и Вејбулове случајне променљиве*

1. УВОД

Шумови услед нежељених рефлексија од околних објеката, који нису предмет радарског осматрања називају се клатери. За разлику од других, ови шумови су ускопојасни, са ширином спектра знатно мањом од пропусног опсега пријемника, па се зато називају и обојени шумови. Спадају у класу корелисаних шумова, јер им је време корелације дуже од импулсне периоде. Клатери су шумови са уским спектром и широком аутокорелационом функцијом. Клатери као врста шума су адитивног карактера.

Први често коришћени модел клатера полази од претпоставке да се он састоји из много независних, случајно орјентисаних рефлектора, без неког доминантног. Амплитуда таквог ехо сигнала се покорава Рејлијевој (Reyleigh) статистици. Овај модел се може употребити за морски и земаљски клатер, ако је радарска резолуциона ћелија или осветљена површина релативно мала.

Међутим, за радаре са врло високом резолуцијом, при малом упадном углу, вероватноћа да се појаве велике вредности ефективне рефлексне површине, већа је од оне коју предвиђа Рејлијева статистика. У овом случају изостаје ефекат усредњавања клатера, јер се у смањеној резолуционој ћелији издвајају индивидуални рефлектори, који могу давати јаке ехо сигнале. Осим тога смањивањем упадног угла повећава се вероватноћа појаве јаких нежељених рефлектованих ехо сигнала од високих морских таласа или вертикалних земаљских објеката. У овим случајевима користи се логнормална статистика.

У пракси се показало да Рејлијева статистика обично даје вредности мање од реалних, док их логнормална статистика често прецењује. Зато се у последње време за описивање клатера користи Вејбулов модел, код којег се, погодним избором параметара, могу добити како Рејлијева расподела тако и логнормална расподела. Према томе, Вејбулов модел се може сматрати неком врстом универзалног модела када је потребно аналитичко моделовање клатерта.

2. ВЕЈБУЛОВ МОДЕЛ КЛАТЕРА

Комплексна Вејбулова случајна променљива $w = u + jv$ се може генерисати помоћу Гаусове комплексне случајне променљиве $g = x + jy$, користећи следећу нелинеарну трансформацију [1,2]:

$$u = x(x^2 + y^2)^{1/a-1/2},\quad v = y(x^2 + y^2)^{1/a-1/2}, \tag{1}$$

где су x и y независне и нормалне случајне променљиве са очекиваним вредностима једнаким нули и варијансом σ^2. Ова нелинеарна трансформација је приказана на сл.1. Заједничка функција густине вероватноће случајних варијабли x и y је дата следећим изразом:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{2}$$

Јакобијана нелинеарне трансформације се може написати у следећем облику:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{2}{a}(x^2+y^2)^{2/a-1}. \tag{3}$$

Применом дефиниције о трансформацији случајних променљивих, заједничка функција густине вероватноће за (u,v) је:

$$p(u,v) = \frac{1}{2}\frac{a}{2\pi\sigma^2}(u^2+v^2)^{a/2-1}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(u^2+v^2)^{a/2}\right]. \tag{4}$$

Изврши се трансформација случајних променљивих (u,v) у поларне координате следећим изразом:

$$w = \sqrt{u^2+v^2},\quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{v}{u}\right). \tag{5}$$

Како је

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{w} \tag{6}$$

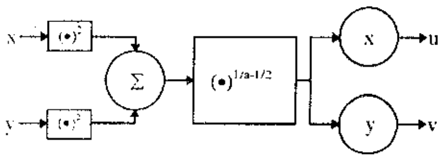
следи да заједничка функција густине вероватноће случајних променљивих w и θ одговара следећем изразу:

$$p(w,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{a}{2\sigma^2}w^{a-1}\exp\left[-\frac{w^a}{2\sigma^2}\right]. \tag{7}$$

Из (7) следи да овојница w има Вејбулову расподелу дату у следећем аналитичком облику:

$$p(w) = \frac{a}{2\sigma^2}w^{a-1}\exp\left[-\frac{w^a}{2\sigma^2}\right], \tag{8}$$

где је a параметар који карактерише стрмину расподеле Вејбулове променљиве.



Сл.1. *Нелинеарна трансформација на основу (1).*

3. АУТОКОРЕЛАЦИОНЕ СЕКВЕНЦЕ

Аутокорелациона секвенца за комплексну Вејбулову случајну променљиву је комплексна секвенца и може се аналитички приказати преко реалног и имагинарног дела на следећи начин:

$$\begin{aligned} R_w(k) &= E\big[(u(m)+jv(m))(u(m+k)-jv(m+k))\big] \\ &= R_{uu}(k)+R_{vv}(k)-j\big[R_{uv}(k)-R_{vu}(k)\big], \end{aligned} \tag{9}$$

где је по дефиницији $R_{uu}(k) = E\big[u(m)u(m+k)\big]$, $R_{uv}(k) = E\big[u(m)v(m+k)\big]$ итд. У даљој анализи се полази од претпоставке да је клатер ускопојасни процес стационаран у ширем смислу. На основу тога произилази следеће својство [3],

$$\begin{aligned} R_{uu}(k) &= R_{vv}(k), \\ R_{uv}(k) &= -R_{vu}(k). \end{aligned} \tag{10}$$

Према томе, (9) се може упростити као

$$R_w(k) = 2(R_{uu}(k) - jR_{uv}(k)). \tag{11}$$

Нормирана аутокорелациона секвенца се дефинише као:

$$r_w(k) = \frac{R_w(k)}{R_w(0)} = r_{uu}(k) - jr_{uv}(k), \tag{12}$$

где је

$$r_{uu}(k) = \frac{2R_{uu}(k)}{R_w(0)}, \tag{13}$$

$$r_{uv}(k) = \frac{2R_{uv}(k)}{R_w(0)}. \tag{14}$$

Сличним поступком, као у предходном случају, може се показати да је нормирана аутокорелациона секвенца комплексне нормалне случајне променљиве дата следећом једнакошћу:

$$r_g(k) = r_{xx}(k) - jr_{xy}(k), \tag{15}$$

где су $r_{xx}(k)$ и $r_{xy}(k)$ редом, реални и имагинарни део.

У следећем кораку је потребно успоставити везу између аутокорелационих секвенци улазног нормалног и излазног Вејбуловог процеса. Полазећи од нелинеарне трансформације дефинисане са (1), $R_{uu}(k)$ и $R_{uv}(k)$ се могу изразити у функцији од улазних случајних променљивих $x(k)$ и $y(k)$. Пошто је $R_{uu}(k) = E\big[u(m)u(m+k)\big]$ и увођењем смене $l = m+k$, добија се израз за $R_{uu}(k)$ у следећем облику [4]:

$$\begin{aligned} R_{uu}(k) = \iint\iint_{-\infty}^{\infty} & x_l(x_l^2+y_l^2)^{(1/a-1/2)}x_m(x_m^2+y_m^2)^{(1/a-1/2)} \\ & \cdot p(x_l,x_m,y_l,y_m)dx_ldx_mdy_ldy_m, \end{aligned} \tag{16}$$

где је $p(x_l,x_m,y_l,y_m)$ заједничка нормална функција густине вероватноће компоненти у два различита временска тренутка. Преласком на поларне координате помоћу трансформације

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \phi &= tg^{-1}\frac{y}{x}, \end{aligned} \tag{17}$$

(16) се може написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} R_{uu}(k) = \iint_0^{\infty}\iint_0^{2\pi} & z_l^{2/a}z_m^{2/a}\cos\phi_l\cos\phi_m \\ & \cdot p(z_l,z_m,\phi_l,\phi_m)dz_ldz_md\phi_ld\phi_m. \end{aligned} \tag{18}$$

После интеграције у (18), $R_{uu}(k)$ се може приказати на следећи начин:

$$\begin{aligned} R_{uu}(k) = 2^{2/a-1}\sigma^{4/a}r_{xx}(k)(1-r_{xx}^2(k)-r_{xy}^2(k))^{2/a+1} \\ \cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\right)\cdot \mathrm{M}\bigg(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{a}+\frac{3}{2};2;r_{xx}^2(k)+r_{xy}^2(k)\bigg). \end{aligned} \tag{19}$$

Израз (19) је важећи ако је испуњен услов да је $r_{xx}^2(k)+r_{xy}^2(k)<1$. Функција M је нормална хипергеометријска функција која се дефинише на следећи начин [5]:

$$\mathrm{M}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}$$
$$c \neq 0,-1,2,\ldots$$

са области конвергенције унутар јединичног круга, тј. $|z|<1$. На сличан начин се добија израз за $R_{uv}(k)$ у следећем облику:

$$R_{uv}(k)=2^{\frac{2}{a}-1}\sigma^{\frac{4}{a}}r_{xy}(k)(1-r_{xx}^2(k)-r_{xy}^2(k))^{\frac{2}{a}+1}$$
$$\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\right)\cdot M\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2},\right.$$
$$\left.\frac{1}{a}+\frac{3}{2};2;r_{xx}^2(k)+r_{xy}^2(k)\right). \tag{20}$$

Једнакости (19) и (20) аналитички повезују аутокорелациона својства улазног нормалног и излазног Вејбуловог процеса. Услов постојања израза (19) и (20), $r_{xx}^2(k)+r_{xy}^2(k)<1$, се може написати у скраћеном облику $|r_g(k)|\le 1$, јер је $r_g(k)=r_{xx}(k)-jr_{xy}(k)$.

Именилац из (13) и (14) се може израчунати на следећи начин:

$$R_u(0)=\frac{2(2\sigma^2)^{\frac{2}{a}}}{a}\Gamma\left(\frac{2}{a}\right). \tag{21}$$

Заменом (19), (20) и (21) у (13) и (14) добијаја се аналитички облик нормиране аутокорелационе секвенце Вејбулове случајне променљиве. Према томе, реални део има следећи аналитички облик

$$r_{uu}(k)=\frac{ar_{xx}(k)}{2\Gamma\left(\frac{2}{a}\right)}(1-r_{xx}^2(k)-r_{xy}^2(k))^{\frac{2}{a}+1}\Gamma^2\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\right)$$
$$\cdot M\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2},\frac{1}{a}+\frac{3}{2};2;r_{xx}^2(k)+r_{xy}^2(k)\right) \tag{22}$$

и имагинарни део

$$r_{uv}(k)=\frac{ar_{xy}(k)}{2\Gamma\left(\frac{2}{a}\right)}(1-r_{xx}^2(k)-r_{xy}^2(k))^{\frac{2}{a}+1}\Gamma^2\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\right)$$
$$\cdot M\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2},\frac{1}{a}+\frac{3}{2};2;r_{xx}^2(k)+r_{xy}^2(k)\right). \tag{23}$$

Заменом $a=2$ у (22) и (23), добија се да је $r_{uu}(k)=r_{xx}(k)$ и $r_{uv}(k)=r_{xy}(k)$. Према томе, излазни Вејбулов процес постаје идентичан улазном нормалном процесу. Тада овојница w има Рејлијеву расподелу.

Из (22) и (23) произилази следећа особина:

$$\frac{R_{uv}(k)}{R_{uu}(k)}=\frac{r_{uv}(k)}{r_{uu}(k)}=\frac{r_{xy}(k)}{r_{xx}(k)}=\mu(k). \tag{24}$$

Израз (24) показује да нелинеарна трансформација (1) не мења однос реалног и имагинарног дела аутокорелационе секвенце. Ова чињеница се може искористити за превођење решавања система две нелинеарне једначине са две непознате у проблем решавања једне нелинеарне једначине са једном непознатом. Из (24) следи:

$$r_{xy}(k)=\mu(k)r_{xx}(k). \tag{25}$$

Заменом (25) у (22) добија се следећи израз:

$$r_{uu}(k)=\frac{ar_{xx}(k)}{2\Gamma\left(\frac{2}{a}\right)}\left[1-(1+\mu^2(k))r_{xx}^2(k)\right]^{\frac{2}{a}+1}$$
$$\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\right)\cdot M\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{2},\right.$$
$$\left.\frac{1}{a}+\frac{3}{2};2;(1+\mu^2(k))r_{xx}^2(k)\right) \tag{26}$$

Познавањам аутокорелационе секвенце Вејбуловог процеса, применом израза (24) израчунава се $\mu(k)$. Решавањем нелинеарне једначине (26) добија се реални део аутокорелационе секвенце улазног нормалног процеса, а имагинарни део употребом (25).

4. ЗАКЉУЧАК

У раду је предложен поступак аналитичког моделовања Вејбуловог клатера. Показана је нелинеарна повезаност између аутокорелационих секвенци комплексне Гаусове и Вејбулове случајне променљиве. Предложени поступак ће се користити у даљем раду као основа за формирање симулационог модела за генерисање клатера.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A.Farina, A.Russo, F.Scannapieco and S.Barbarossa, "Theory of radar detection in coherent Weibull clutter," *IEE Proc.F*, 1987, 134, (2), pp. 174-190.

[2] F.A.Fay, J.Clarke and R.S.Peters, "Weibull distribution applications to sea clutter," *IEEE Conf.Publ.155*, 1977, pp. 101-104.

[3] A.Papoulis, "Probability, random variables and stochastic processes," McGraw-Hill, New York, 1984.

[4] G.Ly and K.Yu, "Modelling and simulation of coherent Weibull clutter," *IEE Proc.F*, vol. 136, Februar 1989.

[5] M.Abramowitz and I.A.Stegan, "Handbook of mathematical functions," Dover Publications Inc., New York, 1972.

Abstract- In this paper the problem of modeling Weibull clutter have been discussed. A generation procedure has been proposed, based on nonlinear mapping relationship between Weibull and Gausian autocorrelation sequences. This procedure can be used for the clutter simulation model design.

THE PROPERTIES AND ANALYTICAL MODELLING OF THE WEIBULL CLUTTER

Milenko Andrić, Aleksa Zejak