XLIII KONFERENCIJA ZA ETRAN, ZLATIBOR, 20 - 22. SEPTEMBRA 1999.

EKVIVALENTNI SFERNI MODELI ZA ODREĐIVANJE RASPODELE SVETLOSNOG FLUKSA U ZATVORENIM PROSTORIMA OBLIKA ZARUBLJENE KUPE

Predrag D. Rančić, Dijana G. Zulkić,
Elektronski fakultet u Nišu, P. O. Box 73, 18000 Niš, Srbija

Sadržaj - *U ovom radu su određene raspodele svetlosnog fluksa i osvetljenosti na površinama osvetljenog zatvorenog prostora oblika zarubljene kupe. Sve površine zarubljene kupe (dva bazisa i omotač) su idealno difuznih karakteristika (Lambertian površine). Unutrašnjost zarubljene kupe se osvetljava tačkastim svetlosnim izvorom (TSI) poznatog položaja i poznate funkcije raspodele svetlosne jačine (FRSJ). Za rešenje ovog problema korišćen je matematički model ekvivalentne osvetljene sfere koji je predložen u prethodnim radovima autora.*

1. UVOD

Proračun raspodele svetlosnog fluksa i osvetljenosti na površinama osvetljenog zatvorenog prostora je polazna osnova u projektovanju unutrašnjeg osvetljenja. Za rešenje ovog problema koriste se mnogi matematički modeli, ali se većina bazira na sistemu jednačina interrefleksije svetlosnog fluksa (SJI-SF), koji zapravo izražava zakon o konzervaciji svetlosnog fluksa. Za formulisanje matematičkog modela SJI-SF, mora se potpuno definisati geometrija problema zatvorenog prostora, prostorni položaj izvora svetlosti kojima se osvetljava zatvoreni prostor i mora se poznavati FRSJ svetlosnih izvora. Kod najvećeg broja razvijenih matematičkih modela, pretpostavlja se da je zatvoreni prostor prazan, a da su sve površine zatvorenog prostora idealno difuzne (Lambertian površina) i poznatih reflektansi. Za rešenje SJI-SF posebno težak problem je odrediti elemente matrice sistema, tzv. koeficijente interrefleksije.

Problem idealno difuzne jednoliko obojene sfere je u svetlotehnici (fotometriji) izuzetno važan u delu svetlotehničkih merenja (Ulbriht-ova sfera), tj. sfera je nezaobilazan element u eksperimentalnom sistemu za merenje svetlosnog fluksa svetlosnih izvora i u sistemu za merenje refleksnih karakteristika materijala. Problem osvetljene sfere, koja je proizvoljno, ali idealno difuzno obojena, je detaljno prikazan u [1], [2] i [3] pri čemu se analiza osvetljene sfere bazira na rešenju SJI-SF. Treba istaći da se ovo rešenje, zbog plemenite sferne geometrije, dobija na vrlo jednostavan način, čak i u slučaju izuzetno velikog broja Lambertian površina od kojih je sfera načinjena.

U ovom radu su iskorišćena dva sferna modela sa ciljem da se dobiju približna rešenja raspodele svetlosnog fluksa na površinama zarubljene kupe. Jedan sferni model po površini i refleksnim karakteristikama odgovara zarubljenoj kupi, a drugi model je sfera opisana oko zarubljene kupe sastavljena od tri površine čije se ekvivalentne reflektanse određuju na osnovu modela koji je prikazan u ovom radu.

U radu je takođe prikazan polazni matematički model zarubljene kupe čije se unutrašnje Lambertian površine osvetljavaju tačkastim svetlosnim izvorom, poznatog položaja i poznate funkcije raspodele svetlosne jačine.

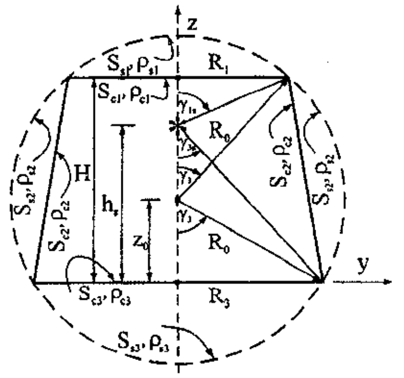
Ova istraživanja imaju za cilj da se teorijski istraže mogućnosti da se sferni modeli (s obzirom na svoju jednostavnost) koriste u inženjerskom projektovanju osvetljenih prostora u obliku zarubljene kupe, ali i da se ispita mogućnost korišćenja prostora u obliku zarubljene kupe umesto sfernih prostora u mernim sistemima.

Istraživanja su pokazala da je uspostavljena potpuna ekvivalencija za osvetljene prostore zarubljene kupe i sfere, tj. ekvivalentni model sfere daje egzaktna rešenja za raspodelu svetlosnog fluksa i osvetljenosti na površinama zarubljene kupe.

2. MATEMATIČKI MODEL ZARUBLJENE KUPE, MODEL (a)

Posmatra se pravilna zarubljena kupa čija se unutrašnjost osvetljava TSI-om, Sl.1. Sve unutrašnje površine su idealno difuzne poznatih reflektansi. Bazisi zarubljene kupe su površina $S_{c1} = \pi R_1^2$ (R_1: poluprečnik gornjeg bazisa) i $S_{c3} = \pi R_3^2$ (R_3: poluprečnik donjeg bazisa), a njihove reflektanse su ρ_{c1} i ρ_{c3}, respektivno. Visina zarubljene kupe je H, a omotač kupe površine S_{c2} je uniformno idealno difuzno obojen i ima poznatu reflektansu ρ_{c2}. Ukupna površina zarubljene kupe je $S_c = S_{c1} + S_{c2} + S_{c3}$. TSI je proizvoljno postavljen na osi kupe, $z = h_s$, i ima poznatu FRSJ, $I(\hat{r}_k) = I(\gamma, \varphi)$, tako da se direktne komponente svetlosnog fluksa, Φ_{c0k}, $k = 1,2,3$, na pojedine površine kupe mogu odrediti na osnovu definicionog izraza

$$\Phi_{c0k} = \int_{\Omega_{ck}} I(\hat{r}_k)\,\mathrm{d}\Omega_{ck} = \int_{S_{ck}} I(\hat{r}_k)\,\frac{\mathrm{d}\vec{S}_{ck}\cdot\hat{r}_k}{r_k^2}, \quad k = 1,2,3, \qquad (1)$$



Sl.1 *Osvetljena zarubljena kupa i ekvivalentna sfera*

gde je Ω_{ck}: prostorni ugao pod kojim se iz tačke položaja svetlosnog izvora vidi k-ta površina zarubljene kupe.

SJI-SF ([1]-[6]), koji izražava zakon o konzervaciji svetlosnog fluksa, za slučaj zatvorenog prostora u obliku zarubljene kupe je

$$\Phi_{c0k} = \sum_{i=1}^{3}(\delta_{ik} - \rho_{ci} f_{ci,ck})\Phi_{ci}\,, \; k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

gde je δ_{ik}: Kronecker-ov simbol, $\Phi_{ci} = \Phi_{c0i} + \Phi_{ind\,ci}$: ukupan svetlosni fluks na i-tu površinu (Φ_{c0i} - direktna i $\Phi_{ind\,ci}$ - indirektna komponenta), $f_{ci,ck}$: koeficijent interrefleksije (faktor oblika) izražen dvostrukim površinskim Fredholm-ovim integralom

$$f_{ci,ck} = \frac{1}{\pi S_{ci}} \iint_{S_{ci}S_{ck}} \frac{\cos\gamma_{ci}\cos\gamma_{ck}}{r_{ik}^2} \mathrm{d}S_{ci}\mathrm{d}S_{ck}\,, \; i,k = 1,2,3. \tag{3a}$$

Za svaki zatvoreni prostor načinjen od, N, $N = 3$, idealno difuznih površina, za faktore oblika uvek važe jednakosti

$$S_{ci} f_{ci,ck} = S_{ck} f_{ck,ci}\,, \; i,k = 1,2,3, \tag{3b}$$

$$\sum_{k=1}^{N} f_{ci,ck} = 1\,, \; i = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{3c}$$

gde (3b) izražava zakon reciprotiteta, a (3c) je takođe posledica zakona o konzervaciji svetlosnog fluksa.

Rešenja za faktore oblika $f_{ci,ck}$, $i,k = 1,2,3$, se dobijaju u zatvorenom obliku rešavanjem (3a), ili daleko jednostavnije, pomoću ekvivalentne sfere koja se poluprečnikom R_0 opisuje oko zarubljene kupe ([2]). Projekcije pojedinih površina zarubljene kupe na sferu su: $S_{s1} = 2\pi R_0^2(1-\cos\gamma_1)$, $S_{s3} = 2\pi R_0^2(1-\cos\gamma_3)$ i $S_{s2} = S_s - S_{s1} - S_{s3}$, gde je S_s ukupna površina sfere, $S_s = 4\pi R_0^2$.

Koristeći model ekvivalentne sfere, za faktore oblika se može pisati

$$f_{c1,c1} = f_{c3,c3} = 0\,, \tag{4a}$$

$$f_{ci,ck} = \frac{S_{si}}{S_{ci}} \frac{S_{sk}}{S_s}\,, \tag{4b}$$

$$f_{c2,c2} = 1 - f_{c2,c1} - f_{c2,c3}\,. \tag{4c}$$

Kada se rešenja (4a), (4b) i (4c) smene u (2) i zatim SJI-SF reši, dobija se raspodela svetlosnog fluksa na površinama zarubljene kupe i srednje vrednosti osvetljenosti ovih površina, tj. direktna komponenta osvetljenosti je

$$E_{c0k} = \frac{\Phi_{c0k}}{S_{ck}}\,, \; k = 1, 2, 3\,, \tag{5}$$

a indirektna komponenta osvetljenosti

$$E_{ind\,ck} = \frac{\Phi_{ind\,ck}}{S_{ck}}\,, \; k = 1, 2, 3\,. \tag{6}$$

3. UPROŠĆENI MODEL SFERE, MODEL (b)

Uprošćeni model sfere sastoji se takođe od tri površine čije su veličine $S'_{sk} = S_{ck}$, $k = 1, 2, 3$, i čije su refleksne karakteristike identične karakteristikama zarubljene kupe, tj. $\rho'_{sk} = \rho_{ck}$, $k = 1, 2, 3$.

Direktni fluks na k-tu površinu sfere jednak je fluksu izračunatom pomoću (1). U ovom slučaju koeficijenti interrefleksije izračunavaju se na vrlo jednostavan način (izraz (3.3) u [1]),

$$f_{ci,ck} \cong f'_{si,sk} = \frac{S'_{sk}}{S'_s} = \frac{S_{ck}}{S_c}\,, \; i,k = 1, 2, 3\,, \tag{7}$$

gde je $S'_s = S_c$: ukupna površina uprošćenog modela ekvivalentne sfere, tj. zarubljene kupe.

Pomoću (7) rešenje za (2) omogućuje da se izračuna indirektna komponenta osvetljenosti k-te površine zarubljene kupe ([1], [2], [3])

$$E_{ind\,ck} \cong E'_{ind\,s} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \rho_{ci}\Phi_{c0i}}{S_c - \sum_{i=1}^{3} \rho_{ci} S_{ci}}\,, \; k = 1, 2, 3\,, \tag{8}$$

tj. indirektna komponenta osvetljenosti na Lambertian površinama sfere i zarubljene kupe ima ravnomernu raspodelu, a direktna komponenta se određuje na osnovu izraza (1) i (5).

4. EKVIVALENTNI MODEL SFERE, MODEL (c)

Sfera opisana oko zarubljene kupe može predstavljati sferu koja je ekvivalentna osvetljenom prostoru zarubljene kupe, ako se odrede reflektanse njenih površina koje su nepoznate i označene kao ρ_{si}, $i = 1,2,3$. Za određivanje nepoznatih reflektansi, SJI-SF (2) se najpre preuredi, kao u [3], u oblik

$$\Phi_{c0k} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\delta_{ik}}{\rho_{ci}} - f_{ci,ck}\right) S_{ci} M_{ci}\,, \; k = 1,2,3\,, \tag{9a}$$

gde je $M_{ci} = \rho_{ci}\Phi_{ci} / S_{ci}$: eksitansa i-te osvetljene površine zarubljene kupe.

Sličan, preuređen SJI-SF se može postaviti i za ekvivalentnu sferu

$$\Phi_{s0k} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\delta_{ik}}{\rho_{si}} - f_{si,sk}\right) S_{si} M_{si}\,, \; k = 1,2,3\,, \tag{9b}$$

gde je $\Phi_{s0k} = \Phi_{c0k}$: direktni svetlosni fkuks na k-tu površinu sfere, ρ_{si}: nepoznata reflektansa i-te površine ekvivalentne sfere, $M_{si} = \rho_{si}\Phi_{si} / S_{si}$: eksitansa i-te površine sfere, $\Phi_{si} = \Phi_{s0i} + \Phi_{ind\,si}$: ukupan svetlosni fluks na i-tu površinu sfere (Φ_{s0i} - direktna i $\Phi_{ind\,si}$ - indirektna komponenta), i $f_{si,sk}$: faktori oblika između i-te i k-te površine ekvivalentne sfere, koji, prema [1], [2] i [3], imaju vrlo jednostavan oblik

$$f_{si,sk} = \frac{S_{sk}}{S_s}, \; i,k = 1,2,3. \qquad (10)$$

Poređenjem koeficijenata u (9a) i (9b), imajući pri tom u vidu (4..) i (10), može se zaključiti da koeficijenti van dijagonala u (9a) i (9b) zadovoljavaju uslov recipročnosti (3b) i da su jednaki, tj.

$$f_{ci,ck} S_{ci} = f_{si,sk} S_{si}, \; i \neq k. \qquad (11)$$

Ekvivalencija sistema (9a) i (9b) se sada obezbeđuje izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata na glavnim dijagonalama. Ovo omogućuje da se odrede reflektanse površina ekvivalentne sfere. Ova rešenja su

$$\rho_{sk} = \frac{\rho_{ck}}{\rho_{ck} + (1-\rho_{ck})\dfrac{S_{ck}}{S_{sk}}}, \; k = 1,2,3. \qquad (12)$$

Sada se problem svodi na na rešavanje raspodele svetlosnog fluksa i indirektne osvetljenosti u okviru sfere, što se jednostavno određuje, a na bazi ekvivalencije se zatim određuje raspodela istih veličina na površinama zarubljene kupe. Raspodela indirektne komponente osvetljenosti na površinama ekvivalentne sfere je uniformna, i prema [1] je data izrazom sličnim izrazu (8), tj.

$$E_{ind\,s} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \rho_{si}\Phi_{s0i}}{S_s - \sum_{i=1}^{3} \rho_{si} S_{si}}. \qquad (13)$$

Na osnovu ekvivalencije sledi da je

$$M_{ck} = \frac{\rho_{ck}\Phi_{ck}}{S_{ck}} = M_{sk} = \frac{\rho_{sk}\Phi_{sk}}{S_{sk}}, \; k = 1,2,3. \qquad (14)$$

Konačno se iz (14) dobija da se indirektne komponente na površinama zarubljene kupe mogu izračunati na osnovu sledećih izraza

$$E_{ind\,ck} = \frac{\rho_{sk}}{\rho_{ck}}\left(\frac{\Phi_{s0k}}{S_{sk}} + E_{ind\,s}\right) - \frac{\Phi_{c0k}}{S_{ck}}, \; k = 1,2,3. \qquad (15)$$

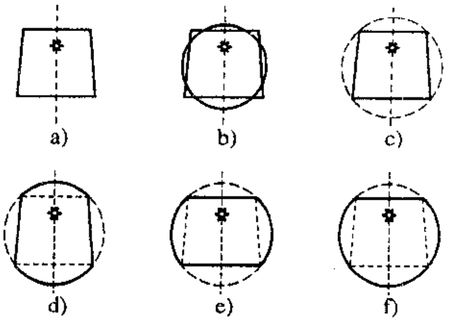
Direktne komponente osvetljenosti površina zarubljene kupe izračunavaju se pomoću (5).

5. NUMERIČKI REZULTATI

Na osnovu opisanih matematičkih modela napisan je paket program za numerička izračunavanja.

Od velikog broja numeričkih eksperimenata, kojima je potvrđena ekvivalencija dva osvetljena zatvorena prostora (zarubljene kupe i sfere), u ovom radu su prikazani numerički rezultati za raspodelu indirektne komponente osvetljenosti: za slučaj cilindra (Tabela 1: $R_1 = R_3 = H/2 = 1\text{m}$) i za slučaj zarubljene kupe (Tabela 2: $R_1 = R_3/2 = H/2 = 1\text{m}$). Prostor cilindra se osvetljava izotropnim TSI-om koji je postavljen na tavanici, $h_s = H$, a prostor zarubljene kupe izotropnim TSI-om postavljenim na visini $h_s = 0.8\,H$. Ukupan instalisani svetlosni fluks izotropnog svetlosnog izvora je $\Phi_0 = 1000$ lm. Zadate reflektanse površina zarubljene kupe i izračunate ekvivalentne reflektanse površina sfere su takođe date u tabelama.

Predloženi metod ekvivalentne sfere primenjen je i na zatvorene prostore koji su sastavljeni od delova kupe i ekvivalentne sfere, a prikazani su na Sl.2 d), e) i f). Rezultati su sređeni u drugom delu tabela, tj. kolone d), e) i f). Vrednosti notirane "bold" su dobijene na osnovu izraza (13) i rešavanjem odgovarajućeg SJI-SF.



Sl.2 *Različiti primeri zatvorenih prostora koji se rešavaju pomoću matematičkog modela osvetljene sfere koja je ekvivalentna osvetljenom prostoru zarubljene kupe.*

Tabela 1: *Cilindar i ekvivalentna sfera,* $h_s = H$

$R_1 = R_3 = H/2 = 1\text{m}$			$E_{ind\,ck}$ [lx]		
k	ρ_{ck}	ρ_{sk}	(b)	(a)	(c)
1	0.8	0.824	64.574	42.986	42.986
2	0.5	0.586	64.574	64.626	64.626
3	0.1	0.115	64.574	69.255	69.255
k	ρ_{ck}	ρ_{sk}	d)	e)	f)
1	0.8	0.824	**60.373**	42.986	42.986
2	0.5	0.586	64.574	**60.373**	**60.373**
3	0.1	0.115	**60.373**	69.255	**60.373**

Tabela 2: *Zarubljena kupa i ekvivalentna sfera,* $h_s = 0.8\,H$

$R_1 = R_3/2 = H/2 = 1\text{m}$			$E_{ind\,ck}$ [lx]		
k	ρ_{ck}	ρ_{sk}	(b)	(a)	(c)
1	0.8	0.811	25.492	14.794	14.794
2	0.5	0.600	25.492	17.931	17.931
3	0.1	0.165	25.492	31.722	31.722
$R_1 = R_3/2 = H/2 = 1\text{m}$			$E_{ind\,ck}$ [lx]		
k	ρ_{ck}	ρ_{sk}	d)	e)	f)
1	0.8	0.811	**19.872**	14.794	14.794
2	0.5	0.600	17.931	**19.872**	**19.872**
3	0.1	0.165	**19.872**	31.722	**19.872**

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu je prikazan matematički model osvetljene sfere koji je ekvivalentan osvetljenom zatvorenom prostoru oblika zarubljene kupe, model (c). U radu je dat i uprošćeni model sfere, koji se u praksi koristi za brzu inženjersku procenu nivoa osvetljenosti, model (b). Radi utvrđivanja ekvivalencije u radu je dat i tzv. standardni model, model (a).

Ekvivalentni model sfere primenjen je i za rešavanje problema raspodele osvetljenosti na različitim oblicima zatvorenog prostora koji su napravljeni od površina zarubljene kupe i od površina ekvivalentne sfere. Iz numeričkih rezultata se može zaključiti da je raspodela indirektne osvetljenosti na sfernim delovima uniformna kao i kod ekvivalentne sfere. Ovi su rezultati u kolonama d), e) i f) označeni "bold".

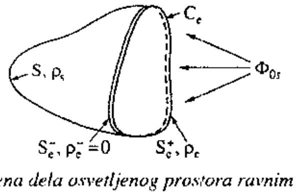
Cilj ovog rada, "detaljna karakterizacija matematičkog modela osvetljene sfere", je rezultirao originalnim rezultatom da se složeniji primeri osvetljenih zatvorenih prostora mogu rešavati tačno, ili približno, pomoću ekvivalentne sfere.

Drugi cilj ovih istraživanja je teorijska analiza ekvivalencije dva osvetljena zatvorena prostora, tj. ispitivanje mogućnosti da se sfera u sistemu za merenje svetlosnog fluksa (Ulbricht-ova sfera), zameni nekim drugim zatvorenim prostorom.

Konačno, autori predlažu da se rezultati ovih istraživanja izlože na AP sekciji ETRAN-a, sa idejom da se možda podstakne rad na karakterizaciji osvetljene sfere i sa radiometrijskog aspekta.

DODATAK

Ovaj dodatak se odnosi na izračunavanje ekvivalentne reflektanse fiktivne ravne površine S_e na čiju konturu se oslanja idealno difuzna površina S poznate reflektanse ρ_s.



Sl.3 *Zamena dela osvetljenog prostora ravnim otvorom*

Ako se kroz ravan otvor omeđen konturom C_e i površine S_e ubacuje svetlosni fluks Φ_{0s} u poluzatvoreni prostor površine S i idealno difuznih karakteristika reflektanse ρ_s, tada je SJI-SF za zatvoreni prostor $(S + S_e^-)$

$$\Phi_s = \Phi_{0s} + \rho_s f_{s,s} \Phi_s + \rho_e^- f_{e,s} \Phi_e^- , \qquad (d1)$$

$$\Phi_e^- = \Phi_{0e}^- + \rho_s f_{s,e} \Phi_s + \rho_e^- f_{e,e} \Phi_e^- , \qquad (d2)$$

gde je $\rho_e^- = 0$ i $\Phi_{0e}^- = 0$.

Rešenja sistema jednačina (d1) i (d2) su

$$\Phi_s = \Phi_0 / (1 - \rho_s f_{s,s}), \qquad (d3)$$

$$\Phi_e^- = \left[\rho_s f_{s,e} / (1 - \rho_s f_{s,s})\right] \Phi_0 . \qquad (d4)$$

Rešenje (d4) predstavlja ukupni svetlosni fluks koji se, posle višestrukih refleksija unutar površine S, izrači kroz otvor površine S_e. Ovo sugeriše da odnos Φ_e^- / Φ_0 predstavlja ekvivalentni koeficijent refleksije površine S_e^+. Za posmatrani zatvoreni prostor, prema (3c) je $f_{e,s} = 1 - f_{e,e} = 1$ i $f_{s,s} = 1 - f_{s,e}$, a prema (3b) je $f_{s,e} = (S_e / S) f_{e,s} = S_e / S$. Ovime je rešenje za ρ_e potpuno određeno, pa se deo prostora površine S i reflektanse ρ_s može zameniti površinom S_e ekvivalentne reflektanse ρ_e,

$$\rho_e = (\rho_s S_e / S) / \left[1 - \rho_s (1 - S_e / S)\right]. \qquad (d5)$$

Postupak ekvivalentiranja je očigledno moguć i u suprotnom pravcu. Uporediti (d5) i (12).

LITERATURA

[1] P.D.Rančić, *Supplements to the Lighting Engineering Characterizations, Vol. 4: Illumination of Closed Spaces, A-Luminous Flux and Illuminance Distributions*, Univ. of Niš, Faculty of Electronic Eng., Niš, May 1997. (in Serbian)

[2] P.D.Rančić, "Characterisation of the Sphere Surface Illumination by the Law of Luminous Flux Conservation", *24th CIE Session'99*, Warsaw, Poland, June 24-30, 1999. (accepted for poster presentation)

[3] P.D.Rančić, "Contribution to Interior Lighting Modelling by Means of Electric Circuits", *Proc. of V Int. Conf. Tesla III Millennium*, Vol.1, pp. V.11-V.18, October 1996.

[4] V. V. Meshkov, *Fundamentals of Illumination Eng.*, English translation, MIR Publishers, Moskow 1981.

[5] CIE (La Commission Internationale de l'Eclairage), "Calcultions for Inerior Lighting - Basic Method", *CIE Tehnical Report*, Pub. No. CIE 40, 1st Edition 1978/ Reprint 1990., Paris.

[6] IESNA (Illuminating Engineering Society of North America), Ed. Mark S. Rea, *LIGHTING HANDBOOK Reference & Application*, 8th Edition New York 1993, Reprinted 1995.

[7] MOON P H and SPENCER D E: *The Photic Field*, MIT Press, Massachusetts, 1981.

ZAHVALNOST: Ovaj rad je delimično finansiran od strane Ministarstva za nauku i tehnologiju Republike Srbije.

Abstract - *Luminous flux and plane illuminance distributions on cut cone surfaces are determined in this paper. Interior of the cut cone is illuminated by a point light source (PLS), of known position and known luminous intensity distribution function (LIDF). Cut cone surfaces are of ideally diffuse characteristics (Lambertian surfaces). System of interreflection equations of luminous flux (SIE-LF) and mathematical model of the equivalent illuminated sphere, which was developed in the authors' previous papers, are used for solving this problem. This paper presents a progression in equivalent sphere model generalization in case of cut cone's illuminated closed space.*

Interior Lighting Calculation of Cut Cone Closed Space Using Equivalent Sphere Models

Predrag D. Rančić and Dijana G. Zulkić