ДВОЖИЧНИ ВОД ЕЛИПТИЧНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА ПРОВОДНИКА ИЗНАД ПРОВОДНЕ РАВНИ

Ненад Н. Цветковић, *Електронски факултет у Нишу*

Садржај - *Помоћу једног једноставног нумеричког метода, решен је двожични вод који се налази изнад проводне равни и чији су проводници попречног пресека облика елипсе. Примењени метод заснива се на апроксимацији еквипотенцијалних површина подесно одабраним функцијама које задовољавају Ламеов услов.*

1. УВОД

Уобичајени методи за решавање електростатичких проблема се могу поделити на две групе, зависно од тога која се величина, електрични скалар потенцијал или расподела наелектрисања на површинама проводника, првобитно одређује, а затим помоћу ње прорачунавају све остале величине од интереса.

У раду [1], предложен је један нов, једноставан и задовољавајуће тачан метод за решавање електростатичких проблема, заснован на директној апроксимацији еквипотенцијалних површина које задовољавају Ламеов услов. Пошто се на овај начин одреде еквипотенцијалне површине, потенцијал и јачина електричног поља прорачунавају се на уобичајени начин, како се то чини у оквиру примене Ламеовог метода [3]. Поменути метод може се применити на водове различитог попречног пресека проводника [2].

У овом раду метод је примењен на вод елиптичног попречног пресека проводника који се налази изнад проводне равни. Извршена је и анализа граничног услова за поље на површини проводника. Добијени резултати указују на задовољавајућу тачност метода.

2. УКРАТКО О ЛАМЕОВОМ МЕТОДУ

У даљем тексту биће укратко изложена примена Ламеовог метода.

Нека је једначина еквипотенцијалних површина у околини усамљене електроде окружене хомогеном, линеарном и изотропном средином

$$f(\boldsymbol{r}) = C\ , \tag{1}$$

тако да је за $C = C_0$ садржана површина тела. Како је на свакој еквипотенцијалној површини потенцијал сталне вредности, то се решење за потенцијал може приказати као

$$\varphi = \varphi[f(\boldsymbol{r})]\ , \tag{2}$$

при чему је услов

$$\varphi = \varphi[f(\boldsymbol{r}) = C] = C^{\text{te}} \tag{3}$$

увек испуњен.

Поред овог услова потенцијал мора да задовољи и Лапласову једначину $\Delta\varphi = 0$. Како је

$$\operatorname{grad}\varphi = \varphi' \operatorname{grad} f \tag{4}$$

и

$$\Delta\varphi = \varphi''(\operatorname{grad} f)^2 + \varphi'\Delta f\ , \tag{5}$$

где је $\varphi' = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}f$ и $\varphi'' = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}f^2$, то се из Лапласове једначине добија

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{\Delta f}{(\operatorname{grad} f)^2}\ . \tag{6}$$

Лева страна претходног израза је функција само једне променљиве f, па таква мора бити и десна страна, односно мора бити испуњен Ламеов услов

$$g(f) = \frac{\Delta f}{(\operatorname{grad} f)^2}\ , \tag{7}$$

где је

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -g(f)\ . \tag{8}$$

Када је услов (7) испуњен, за јачину електричног поља и потенцијал се добија:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = -\varphi' \operatorname{grad} f = = -C_1 \operatorname{grad} f\ e^{-\int g(f)\,\mathrm{d}f} \tag{9}$$

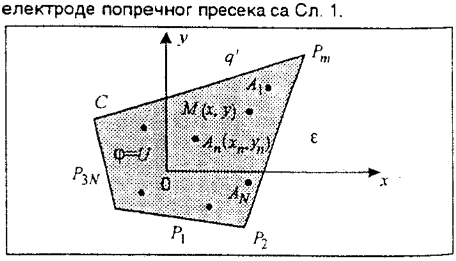
и

$$\varphi = C_2 - C_1 \int e^{-\int g(f)\,\mathrm{d}f}\,\mathrm{d}f\ , \tag{10}$$

где су C_1 и C_2 константе интеграције.

3. АПРОКСИМАЦИЈА ЕКВИПОТЕНЦИЈАЛА

Поступак апроксимације еквипотенцијала биће приказан на примеру планпаралелног поља које постоји у простору поред усамљене цилиндричне електроде попречног пресека са Сл. 1.



Сл. 1. *Попречни пресек цилиндричне електроде*

Једначина еквипотенцијалних површина биће потражена у облику

$$f = \prod_{n=1}^{N} f_n^{\alpha_n} = C, \tag{11}$$

$$f_n = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2, \tag{12}$$

при чему се тачке $A_n(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, налазе унутар проводника. Непознате α_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, и координате тачака унутар проводника x_n и y_n бирају се тако да на контури попречног пресека проводника C, вредност величине f буде константна у $3N$ тачака подешавања P_m одабраних на површини електроде. На овај начин добија се следећи систем нелинеарних једначина

$$f(\mathrm{P}_m) = C^{\mathrm{te}}, \; m = 1, 2, \ldots, 3N. \tag{13}$$

Решавањем претходног система једначина одређују се координате унутрашњих тачака и величине у експонентима. Како породица површина (11) испуњава Ламеов услов при чему је

$$g = 1/f, \tag{14}$$

то се се после интеграције за потенцијал добија

$$\varphi = C_1 \ln f + C_2 =$$
$$= C_1 \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \ln\left[(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2\right] + C_2. \tag{15}$$

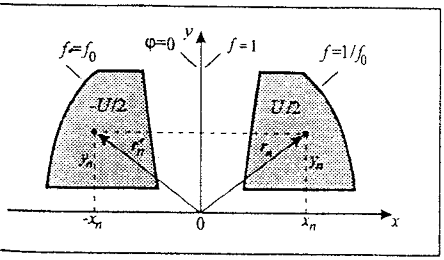
Константа C_1 одређује се помоћу везе

$$q' = -\pi\varepsilon C_1 \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \tag{16}$$

где је q' подужно наелектрисање електроде, док је константу C_2 могуће одредити након избора референтне тачке.

У случају двожичног вода чији је попречни пресек приказан на Сл. 2, једначина еквипотенцијалних површина дата је изразом (11), при чему је

$$f_n = \frac{(r - r_n')^2}{(r - r_n)^2} = \frac{(x + x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}. \tag{17}$$



Сл. 2. *Попречни пресек двожичног вода*

У симетралној равни вода (за $x = 0$) је $f = 1$, на десном проводнику је $f = f_0 = C^{te}$, а на левом $f = 1/f_0$.

Потенцијал се израчунава по обрасцу

$$\varphi = \frac{U}{2} \frac{\ln f}{\ln f_0}, \tag{18}$$

па су вектори електричног и магнетног поља

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{19}$$

и

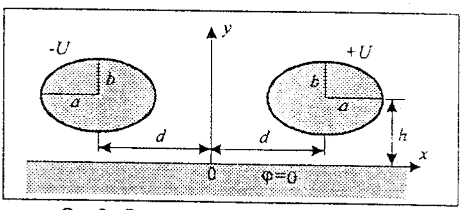
$$\boldsymbol{H} = \hat{z} \times \boldsymbol{E}\sqrt{\varepsilon/\mu} \tag{20}$$

Подужна капацитивност вода одређује се као

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln f_0} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n. \tag{21}$$

4. ПРИМЕРИ

Посматра се двожични вод са Сл. 3, чији се проводници елиптичног попречног пресека полуоса a и b налазе изнад проводне равни .



Сл. 3. *Двожични вод са проводницима елиптичног попречног пресека изнад проводне равни*

У овом случају у израз (11) који представља једначину еквипотенцијалних површина потребно је увртити функције

$$f_n = \frac{(x - x_n)^2 + (y + y_n)^2}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \frac{(x + x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(x + x_n)^2 + (y + y_n)^2} \tag{22}$$

Параметарске једначине елипсе која представља попречни пресек десног проводника су

$$x = d + a\cos p \tag{23}$$

и

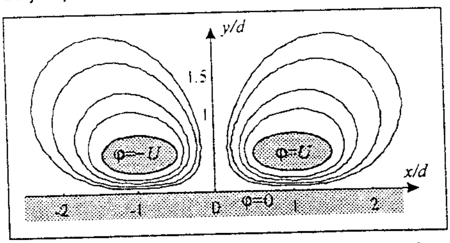
$$y = h + b\sin p \tag{24}$$

У Таблици 1 приказане су вредности величина α_n, x_n и y_n за двожични вод са Сл. 3, када је $h/d = a/d = 0.5$ и $b/d = 0.25$, при чему број чланова реда у апроксимацији (11) узима различите вредности.

Таблица 1.

N	n	α_n	x_n/d	y_n/d
1	1	1.411766606	1.076066186	0.356901476
2	1	0.603515394	0.673895156	0.440019820
	2	0.526408678	1.319603424	0.425525212
3	1	0.512829816	0.944364175	0.361561833
	2	0.314851476	0.609808868	0.487135890
	3	0.325062389	1.377561316	0.457332563
4	1	0.148050170	0.568567447	0.508972270
	2	0.358023406	0.723004030	0.428453318
	3	0.395320876	1.103478005	0.365018373
	4	0.242303397	1.397632266	0.472470639
6	1	0.151860162	0.577153028	0.497796398
	2	0.201600232	0.669722305	0.459565937
	3	0.262707797	0.871134430	0.380616800
	4	0.252477637	1.140806351	0.369919674
	5	0.176593276	1.350563799	0.444825721
	6	0.095172664	1.428801551	0.496473402

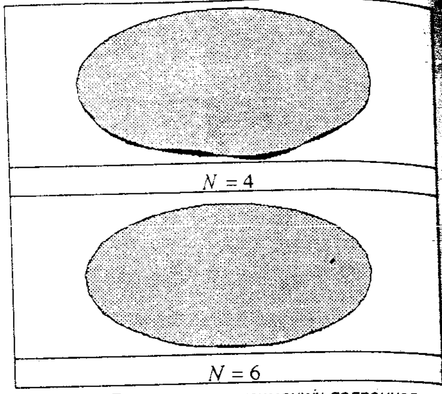
На Сл. 4 приказане су еквипотенцијалне линије када је $h/d = a/d = 0.5$, $b/d = 0.25$ и број чланова у апроксимацији (11) $N = 4$.



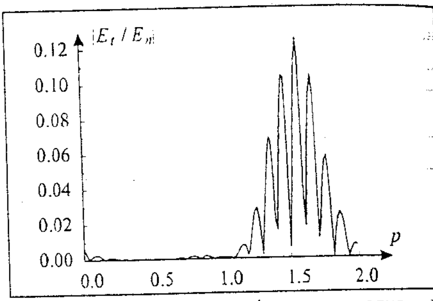
Сл. 5. *Еквипотенцијале вода са Сл. 3, када је* $h = a = 0.5d$, $b = 0.25d$ *и* $N = 6$

Грешка у апроксимацији елипсасте криве која омеђује десни проводник када је $h = a = 0.5d$ и $b = 0.25d$ за $N = 4$ и $N = 6$ приказана је на Сл. 5. Једноставним посматрањем уочава се да је за $N = 6$ начињена грешка у апроксимацији попречног пресека готово занемарљиво мала на скоро целој површини проводника, осим на делу површине који је најближи проводној равни.

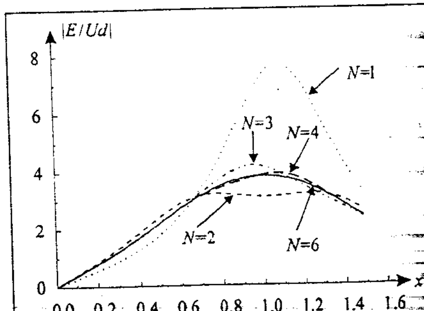
Однос тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља на површини десног проводника у функцији параметра p за $h = a = 0.5d$, $b = 0.25d$ и $N = 6$ приказан је на Сл. 6. Као што се види, гранични услов за електрично поље практично је испуњен на целој површини проводника, осим за вредности у околини тачке $p = 1.5$, што одговара тачкама на површини проводника које су најближе проводној равни. Грешка је локалног карактера и реда је неколико процената, осим у појединим изолованим тачкама где достиже вредност 10-12%.



Сл. 6. *Грешка у апроксимацији попречног пресека десног проводника вода са Сл. 3, када је* $h = a = 0.5d$ *и* $b = 0.25d$



Сл. 7. *Однос тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља на површини десног проводника вода са Сл. 3, када је* $h = a = 0.5d$, $b = 0.25d$ *и* $N = 6$



Сл. 8. *Интензитет електричног поља на проводној равни вода са Сл. 3, када је* $h = a = 0.5d$ *и* $b = 0.25d$

Гранични услов за електрично поље на п шини проводне равни аутоматски је задово због природе метода. Нормализована вредност чине електричног поља на проводној равни за вод са Сл. 3, када је $h = a = 0.5d$, $b = 0.2$

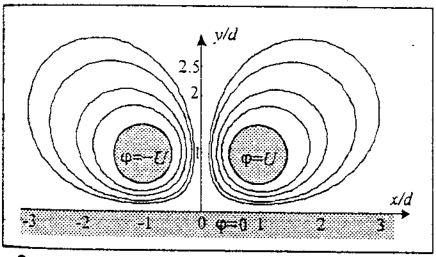
N узима различите вредности, приказана је на Сл. 8. Уочава се да се да се са порастом броја чланова у апроксимацији (11), разлика функција интензитета електричног поља за различите вредности N смањује.

У Таблици 2 налазе се вредности величина α_n, x_n и y_n за двожични вод са Сл. 3, када је $h/d = 1$ и $a/d = b/d = 0.5$, при чему N узима различите вредности. Еквипотенцијалне линије за овај случај, када је $N = 4$ приказане су на Сл. 9. На Сл. 10 приказан је попречни пресек десног проводника и крива која омеђује десни проводник када је $N = 2$. Однос тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља на површини десне електроде у функцији параметра p када је $N = 4$ приказан је на Сл. 11.

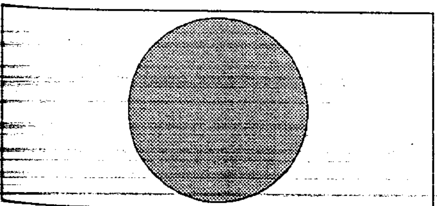
Може се уочити да се већ за $N = 2$ попречни пресек десног проводника и површина којом се овај попречни пресек апроксимира практично поклапају, док је гранични услов за електрично поље практично испуњен на целој површини проводника.

Таблица 2.

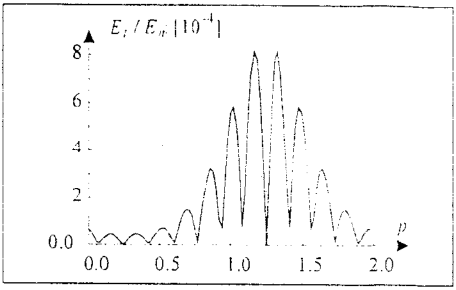
N	n	α_n	x_n/d	y_n/d
1	1	0.983691834	0.929537536	0.094673021
2	1	0.471935406	0.836600919	1.025214529
	2	0.523458020	1.016280831	0.846716545
4	1	0.391949028	0.826657282	1.007424456
	2	0.105747068	0.881244488	1.085947383
	3	0.391949028	1.007424456	0.826657282
	4	0.105747068	1.085947383	0.881244488



Слика 9. *Еквипотенцијале вода са Сл. 3, када је $h = d$, $a = b = 0.5d$ и $N = 4$*



Сл. 10. *Попречни пресек десног проводника вода са Сл. 3 и површина помоћу које се апроксимира када је $h = d$, $a = b = 0.5d$ и $N = 2$*



Сл. 11. *Однос тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља на површини десног проводника вода са Сл. 3, када је $h = a = 0.5d$, $b = 0.25d$ и $N = 4$*

5. ЗАКЉУЧАК

Помоћу једноставног нумеричког метода заснованог на апроксимацији еквипотенцијалних површина помоћу подесно одабраних функција које испуњавају Ламеов услов, одређена је расподела електромагнетног поља у двожичном воду елиптичног попречног пресека проводника који се налази изнад проводне равни. Са малим бројем чланова у изразу (11) постиже се задовољавајућа тачност, како у погледу апроксимације еквипотенцијалних површина, тако и у погледу испуњења граничног услова за електрично поље на површини проводника.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Величковић Д. М., "*Приближно нумеричко решавање електростатичких проблема помоћу Ламеовог метода*", Зборник радова XXXIX Конференције за ЕТРАН, Златибор, 6.-9. јуни 1995, Свеска II, стр. 282-285.

[2] Veličković D. M., Cvetković N. N: "*Lame's Method in Approximate Numerical Solving of Plan-Parallel Electrostatic Problems*", 7th International IGTE Symposium, Graz, Austria, 23.-25. September 1996., Proceedings of Papers, pp. 420-423.

[3] Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н., "*Методи расчета электростатических полей*", ВЫШАЯ ШКОЛА, Москва 1963., стр. 259-271.

Abstract - The line with elliptical conductors over a conducting plane is solved by using simple numerical method for analysis of a transmission line. The method is based on the direct approximation of equipotential surfaces with simple functions which automatically satisfy Lame's condition.

TWO WIRE LINE WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION CONDUCTORS OVER CONDUCTING PLANE

Nenad N. Cvetković