XL KONFERENCIJA ZA ETRAN, BUDVA, 4 - 7. JUNA 1996.

OPTIMALNI PRIJEMNIK ZA SIGNALE U OBOJENOM GAUSOVOM ŠUMU U PRISUSTVU INTERSIMBOL INTERFERENCIJE

Nebojša Stojanović, Danijela Zvezdanović, Elektronski fakultet u Nišu

Sadržaj: Razmotren je slučaj detekcije digitalnog signala u obojenom šumu u prisustvu intersimbol interferencije. Dobijena je funkcija verodostojnosti i zakon odluke. Na osnovu toga je projektovan optimalni prijemnik za digitalne signale u obojenom Gausovom šumu u prisustvu interferencije. Za dobijeni sistem je proračunata verovatnoća greške u zavisnosti od odnosa signal šum.

1. UVOD

Pošto je u praksi, u sistemima prenosa, realno prisutan obojeni šum, razmotrili smo problem detekcije digitalnog signala u obojenom Gausovom šumu.

Razmatran je prenos bipolarnih impulsa, koji imaju Gausov oblik, u osnovnom opsegu. Primenom Karhunen-Loeve razvoja ([1]) su dobijene funkcije verodostojnosti i na osnovu njih određen odnos verodostojnosti i prag odluke.

Funkcije verodostojnosti i prag odluke su dobijeni rešavanjem prve Fredholmove integralne jednačine. Rešenja ove integralne jednačine su dobijena dodavanjem odgovarajućih delta funkcija regularnom rešenju ([1]) jer poslati signal ne zadovoljava granične uslove čija je egzistencija neophodna da bi postojalo rešenje pomenute integralne jednačine [2]. Na osnovu dobijenog odnosa verodostojnosti je projektovan optimalni prijemnik i određena verovatnoća greške sistema.

2. PROJEKTOVANJE OPTIMALNOG PRIJEMNIKA

Razmotren je prenos digitalnog signala kod koga bipolarni impulsi imaju Gausov oblik u prisustvu intersimbol interferencije. Pretpostavljeno je, zbog jednostavnosti, da je bitna samo interferencija između trenutnog i prethodnog impulsa. Takođe je pretpostavljeno da su obe vrednosti signala, "nula" ili "jedinica", jednako verovatne. Impuls je pozitivan ili negativan, zavisno da li je poslata 0 ili 1. Brzina poslatog signala je 1/T.

Posmatran je signal u digitskom intervalu (0, T). Ukupni ulazni signal prijemnika u posmatranom digitskom intervalu (0, T), je:

$$r(t) = Se^{-\alpha t^2} + aSe^{-\alpha(t+T)^2} + n(t) \tag{1}$$

za H_1 hipotezu

$$r(t) = -Se^{-\alpha t^2} + aSe^{-\alpha(t+T)^2} + n(t) \tag{2}$$

za H_0 hipotezu.

S je amplituda, α je parametar koji definiše širinu impulsa. Parametar a može da uzme vrednosti 1 ili -1 sa jednakom verovatnoćom pa je njegova funkcija gustine verovatnoće:

$$p(a) = \frac{1}{2}\delta(a-1) + \frac{1}{2}\delta(a+1) \tag{3}$$

n(t) je Gausov obojeni šum, sa nultom srednjom vrednošću i autokorelacionom funkcijom koja je data izrazom:

$$R_n(\tau) = \sigma_n e^{-\alpha_n|\tau|} \tag{4}$$

σ_n^2 je snaga šuma, a α_n je parametar oblika autokorelacione funkcije šuma.

Zbog pojave prekoračenja opsega u kome računar može da radi, koje se javljalo pri kasnijem proračunu verovatnoće greške sistema, izvršena je normalizacija vremena digitskim intervalom T, tj. t=t/T, što je zahtevalo normalizaciju parametara oblika impulsa α i šuma α_n, tj. uzeto je $\alpha=\alpha \cdot T^2$ i $\alpha_n=\alpha_n \cdot T$. Sada je posmatrani digitski interval (0, 1) umesto (0, T).

Primenom Karhunen-Loeve razvoja ([1]) dobijene su uslovne funkcije verodostojnosti:

$$\begin{aligned} p_1(r/a) = &-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 r(t)r(\tau)R_n^{-1}(t-\tau)\,dt\,d\tau \\ &+\int_0^1\left[r(t)-\frac{1}{2}s_1(t,a)\right]\cdot h_1(t,a)\,dt \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} p_0(r/a) = &-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 r(t)r(\tau)R_n^{-1}(t-\tau)\,dt\,d\tau \\ &+\int_0^1\left[r(t)-\frac{1}{2}s_0(t,a)\right]\cdot h_0(t,a)\,dt \end{aligned} \tag{6}$$

gde je $R_n^{-1}(t-\tau)$ inverzna autokorelaciona funkcija šuma, a poslati signal $s_1(t, a)$ i $s_0(t, a)$ je dat izrazima:

$$s_1(t,a) = Se^{-\alpha t^2} + aSe^{-\alpha(t+T)^2} \tag{7}$$

za H_1 hipotezu,

$$s_0(t,a) = -Se^{-\alpha t^2} + aSe^{-\alpha(t+T)^2} \tag{8}$$

za H_0 hipotezu.

Funkcije $h_1(t,a)$ i $h_0(t,a)$ su dobijene rešavanjem četiri Fredholmove integralne jednačine prve vrste:

$$s_1(t,a=1) = \int_0^1 R_n(t-\tau)\cdot h_1(\tau,a=1)\,d\tau \tag{9}$$

$$s_1(t,a=-1) = \int_0^1 R_n(t-\tau)\cdot h_1(\tau,a=-1)\,d\tau \tag{10}$$

$$s_0(t,a=1) = \int_0^1 R_n(t-\tau)\cdot h_0(\tau,a=1)\,d\tau \tag{11}$$

$$s_0(t,a=-1) = \int_0^1 R_n(t-\tau)\cdot h_0(\tau,a=-1)\,d\tau \tag{12}$$

Ovi integrali su rešeni za slučaj kada je spektralna gustina snage šuma racionalna funkcija, što za zadatu autokorelacionu funkciju (4) i jeste slučaj. Dobijenom rešenju su dodate odgovarajuće delta funkcije jer poslati signal ((7), (8)) ne zadovoljava potrebne granične uslove na krajevima digitskog intervala, [2]. Konačna rešenja integralnih jednačina (9)-(12) su oblika:

$$h_{\xi}(t,a)=\frac{1}{2\cdot\alpha_n\cdot\sigma_n^2}\cdot\Big\{\left[\alpha_n\cdot s_{\xi}(0,a)-s'_{\xi}(0,a)\right]\cdot\delta(t)+$$
$$+\alpha_n\cdot s_{\xi}(1,a)\delta(t-1)-$$
$$-s'_{\xi}(1,a)\delta(t-1)+$$
$$+\alpha_n^2\cdot s_{\xi}(t,a)-s''_{\xi}(t,a)\Big\} \qquad (13)$$

za $0\le t\le 1$, gde je $\xi=\begin{cases}1 \text{ , za } H_1 \text{ hipotezu}\\ 0 \text{ , za } H_0 \text{ hipotezu}\end{cases}$.

Efekat delta funkcija, koje se javljaju u izrazu (13), je da u krajnjim tačkama veze treba uzeti odmerke primljenog signala r(t) u vremenskim trenucima t=0 i t=T, (treba uzeti u obzir da se u realnom sistemu radi sa nenormalizovanim vremenom).

Korišćene su zamene:

$$X_1=\int_0^1 r(t)\cdot h_1(t,a=1)dt \qquad (14)$$

$$X_2=\int_0^1 r(t)\cdot h_1(t,a=-1)dt \qquad (15)$$

$$X_3=\int_0^1 r(t)\cdot h_0(t,a=1)dt \qquad (16)$$

$$X_4=\int_0^1 r(t)\cdot h_0(t,a=-1)dt \qquad (17)$$

Za dobijeni oblik funkcije (13) važe relacije $X_4=-X_1$ i $X_3=-X_2$. U narednim izrazima su korišćene i sledeće zamene:

$$M=\int_0^1 s_1(t,a=1)\cdot h_1(t,a=1)dt=\int_0^1 s_0(t,a=-1)\cdot h_0(t,a=-1)dt \qquad (18)$$

$$N=\int_0^1 s_1(t,a=-1)\cdot h_1(t,a=-1)dt=\int_0^1 s_0(t,a=1)\cdot h_0(t,a=1)dt \qquad (19)$$

Primenom gore navedenih zamena i usrednjavanjem izraza (5) i (6) po parametru a, [1], dobija se sledeći izraz za odnos verodostojnosti.

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)}=\frac{e^{X_1-\frac{1}{2}M}+e^{X_2-\frac{1}{2}N}}{e^{-X_1-\frac{1}{2}M}+e^{-X_2-\frac{1}{2}N}} \qquad (20)$$

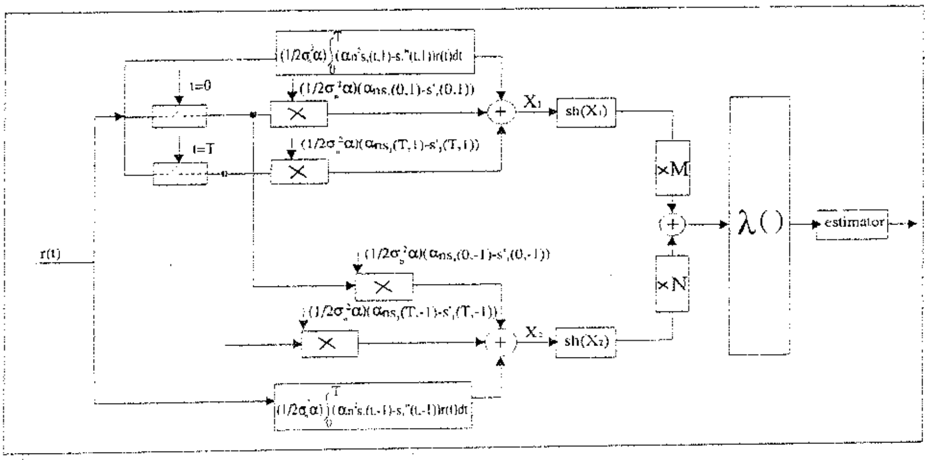
Zakon odluke, [1], je:

$$\lambda(r)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

Kada je $\lambda_0=1$, zakon odluke postaje

$$e^{-\frac{1}{2}M}sh(X1)+e^{-\frac{1}{2}N}sh(X2)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0 \qquad (21)$$

Na osnovu (21) i izraza (13), (14)-(17) dobijen je optimalni prijemnik prikazan na Sl.1.



Sl. 2. Blok šema optimalnog prijemnika

3. PRORAČUN VEROVATNOĆE GREŠKE SISTEMA

Da bi se odredile performanse prijemnika neophodno je odrediti združenu funkciju gustine verovatnoće promenljivih X_1 i X_2 za obe hipoteze, [3]. Zbog složenosti izraza nije određen analitički oblik združene funkcije gustine verovatnoće za ove dve promenljive, već je samo izvršen kompjuterski proračun verovatnoće greške. Postupak proračuna verovatnoće greške je zahtevao prvo proračun uslovnih srednjih vrednosti, varijansi i korelacija promenljivih X_1 i X_2. Uslovne srednje vrednosti promenljivih X_1 i X_2, su:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_{1,2/a} = \frac{S^2}{2\cdot\sigma_n^2}[(1+\mu\cdot c(1))(\xi + a\cdot f_1) &+ \\
+(c(2)+\mu\cdot c(3))(\xi\cdot f_1 + a\cdot f_2) &+ \\
+c(4)(\xi\cdot y1 + a\cdot y2) &+ \\
+c(4)\cdot\mu\cdot(\xi\cdot y2 + a\cdot y6) &+ \\
-c(5)(\xi\cdot y3 + a\cdot y7) &- \\
-c(5)\cdot\mu\cdot(\xi\cdot y4 + a\cdot y8). & \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Uslovna srednja vrednost za X_1 se dobija za $\mu=1$, a za X_2 za $\mu=-1$. Takođe, zamenom $\xi=1$ se dobijaju uslovne srednje vrednosti za hipotezu H_1, a za $\xi=-1$ za hipotezu H_0. Konstante i izrazi koji se javljaju u (22) su:

$$c(1) = f_1\cdot(1+2\cdot L)$$
$$c(2) = f_1\cdot(1-2\cdot L)$$
$$c(3) = f_2\cdot(1-4\cdot L)$$
$$c(4) = \alpha_n + 2\cdot L$$
$$c(5) = 4\cdot\alpha\cdot L$$

$$L = \alpha/\alpha_n \qquad (23)$$

$$y1 = \int_0^1 e^{-2\cdot\alpha\cdot t^2}dt$$

$$y2 = \int_0^1 e^{-\alpha\cdot t^2}\cdot e^{-\alpha\cdot(t+1)^2}dt$$

$$y3 = \int_0^1 t^2\cdot e^{-2\cdot\alpha\cdot t^2}dt$$

$$y4 = \int_0^1 (t+1)^2 e^{-\alpha\cdot t^2}\cdot e^{-\alpha\cdot(t+1)^2}dt$$

$$y6 = \int_0^1 e^{-2\cdot\alpha\cdot(t+1)^2}dt$$

$$y7 = \int_0^1 t^2\cdot e^{-\alpha\cdot t^2}\cdot e^{-\alpha\cdot(t+1)^2}dt$$

$$y8 = \int_0^1 (t+1)^2 e^{-2\cdot\alpha\cdot(t+1)^2}dt \qquad (24)$$

Uslovne varijanse su jednake za obe hipoteze i date su izrazom:

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(X_{1,2/a} - \overline{X}_{1,2/a}\right)^2\right\} = \frac{S^2}{4\cdot\sigma_n^2}\Big[(1+\mu\cdot c(1))^2 &+ \\
+(c(2)+\mu\cdot c(3))^2 &+ \\
+(c(4))^2(az\cdot bz + \mu\cdot cz\cdot dz) &- \\
-(c(5))^2(ez\cdot fz + \mu\cdot gz\cdot hz) & \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Za $\mu=1$ dobija se uslovna varijansa za X_1, a $\mu=-1$ ista za X_2. Korelacioni koeficijenti ($\rho_{12}=\rho_{21}$) za promenljive X_1 i X_2 su isti za obe hipoteze:

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(X_{1/a} - \overline{X}_{1/a}\right)\left(X_{2/a} - \overline{X}_{2/a}\right)\right\} = \frac{S^2}{4\cdot\sigma_n^2}\Big\{\left[1-(c(1))^2\right] + \left[(c(2))^2 - (c(3))^2\right] + (c(4))^2(az\cdot bz - cz\cdot dz) &+ \\
+[c(5)]^2(ez\cdot fz - gz\cdot hz) + 2\cdot[c(2) - c(1)\cdot c(3)]\cdot f + 2\cdot c(4)\cdot bz\cdot[1 + c(2)\cdot(1/f)] &- \\
-2\cdot c(4)\cdot dz\cdot[c(1) + c(3)\cdot(1/f)] - 2\cdot c(5)\cdot fz\cdot[1 + c(2)\cdot(1/f)] &+ \\
+2\cdot c(5)\cdot hz\cdot[c(1) + c(3)\cdot(1/f)] + 2\cdot c(5)\cdot c(4)\cdot[cz\cdot hz - az\cdot fz]\Big\} & \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Izrazi koji se javljaju u (26) su:

$$f = e^{-\alpha_n}$$

$$az = \int_0^1 e^{-\alpha\cdot t^2} e^{-\alpha_n\cdot t}dt$$

$$bz = \int_0^1 e^{-\alpha\cdot t^2} e^{\alpha_n\cdot t}dt$$

$$cz = \int_0^1 e^{-\alpha\cdot(t+1)^2} e^{-\alpha_n\cdot t}dt$$

$$dz = \int_0^1 e^{-\alpha\cdot(t+1)^2} e^{\alpha_n\cdot t}dt$$

$$ez = \int_0^1 t^2\cdot e^{-\alpha\cdot t^2} e^{-\alpha_n\cdot t}dt$$

$$fz = \int_0^1 t^2\cdot e^{-\alpha\cdot t^2} e^{\alpha_n\cdot t}dt$$

$$gz = \int_0^1 (t+1)^2 e^{-\alpha\cdot(t+1)^2} e^{-\alpha_n\cdot t}dt$$

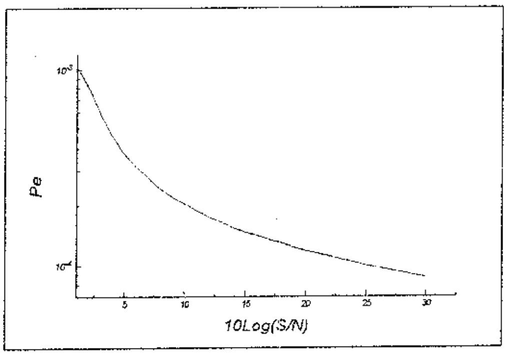
$$hz = \int_0^1 (t+1)^2 e^{-\alpha \cdot (t+1)^2} e^{\alpha_n \cdot t} dt \tag{27}$$

Na osnovu dobijenih vrednosti za uslovne srednje vrednosti, varijanse i kovarijanse formirana je korelaciona matrica i iz nje [3] određene uslovne raspodele $p_0(X_1, X_2 \backslash a)$ i $p_1(X_1, X_2 \backslash a)$.

Raspodele $p_0(X_1, X_2)$ i $p_1(X_1, X_2)$ su dobijene usrednjavanjem uslovnih raspodela po parametru a. Verovatnoća greške sistema je određena korišćenjem izraza:

$$P_e = \frac{1}{2} \iiint_{J_1} p_0(X_1, X_2) dX_1 dX_2 + \\ + \frac{1}{2} \iiint_{J_0} p_1(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \tag{28}$$

Na sl.2 je prikazana zavisnost verovatnoće greške sistema od odnosa signal/šum (ST^2/σ_n^2). Pri tome su korišćene sledeće vrednosti parametara sistema: *S=0.8*, *T=1E-6 s*, dok su nenormalizovane vrednosti parametara oblika krive signala i autokorelacione funkcije šuma, respektivno, $\alpha = 3.14E12$, $\alpha_n = 1609437.9$.



Sl. 2. Zavisnost verovatnoće greške od odnosa signal / šum

4. ZAKLJUČAK

Proračun optimalnog prijemnika za detekciju signala u obojenom Gausovom šumu je u većini slučajeva vrlo zamoran i obiman posao, [1]. Poseban problem pretstavlja rešavanje homogenih integralnih jednačina i dobijanje sopstvenih vrednosti i funkcija za odgovarajuće jezgro tj. oblik autokorelacione funkcije obojenog šuma. Postupak se u mnogome uprošćuje ako se funkcije verodostojnosti izraze u zavisnosti od rešenja Freholmove jednačine, [1]. U ovom radu su ta rešenja dobijena za slučaj kada obojeni Gausov šum ne sadrži dodatnu belu komponentu (prva Fredholmova integralna jednačina), a spektar šuma je racionalna funkcija. Pri tome smo vodili računa da rešenje, tj signal za koji se rešenje dobija, zadovoljava odgovarajuće uslove, [2]. Na osnovu ovoga je projektovan je optimalni prijemnik signala u prisustvu interferencije trenutnog i prethodnog impulsa i proračunata verovatnoća greške sistema u zavisnosti od odnosa signal/šum.

Abstract: Detection of digital signal in colored Gaussian noise in the presence of intersymbol interference is considered. Designing of optimal receiver for digital signals in colored Gaussian noise is based on the derived likelihood ratio and decision rule. Block scheme of the optimal receiver is proposed. System error probability versus signal-to-noise ratio is computed.

LITERATURA

[1] A. D. Whalen, "Detection of Signals in Noise", Academic Press, New York and London.

[2] W. B. Davenport, W. L. Root, "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise", McGraw-Hill, New York, 1958.

[3] N. R. Levin. "Teoreticheskie osnov'i statisticheskoy radiotehniki", Sovetskoe Radio, Moscow, 1974.

Optimal Receiver for Signals in Colored Gaussian Noise in the Presence of Intersymbol Interference

Nebojša Stojanović, Danijela Zvezdanović