

Nela Zavaljevski

INSTITUT ZA NUKLEARNE NAUKE "BORIS KIDRIČ" - VINČA

OOOR Institut za nuklearnu energetiku i tehničku fiziku NET

TEORIJA PERTURBACIJA GRANICA ZA LINEARNE VREMENSKI ZAVISNE
FUNKCIONALE NEUTRONSKEG FLUKSA

BOUNDARY PERTURBATION THEORY FOR LINEAR TIME DEPENDENT
FUNCTIONALS OF NEUTRON FLUX

SADRŽAJ U radu je nedavno razvijena teorija perturbacije granica generalizovana za vremenski zavisne linearne funkcionalne neutronskeg fluksa. Koristeći nestacionarnu transportnu jednačinu u aproksimaciji konačnih razlika izvedeni su perturbacioni izrazi za male promene u granici nuklearnog sistema. Pokazano je da se efekat perturbacije prvog reda može izračunati korišćenjem adjungovanih jednačina za standardne vremenski zavisne proračune perturbacija pri fiksnim granicama.

ABSTRACT In this paper recently developed boundary perturbation theory is generalized for time-dependent linear functionals of neutron flux. Using the implicit finite difference approximation of the nonstationary transport equation the perturbation expressions for small changes in boundary of a nuclear system are obtained. It is shown that the effect of the first order perturbation can be calculated using adjoint equations for standard time dependent perturbation calculations with fixed boundary.

1. UVOD

Teorija perturbacija je jedna od standardnih metoda analize nuklearnih reaktora /1/ i omogućuje proračun malih promena faktora umnožavanja neutrona i drugih funkcionala neutronskeg i adjungovanog fluksa usled malih promena materijalnog sastava ili efikasnih preseka. Oblasti primene perturbacione teorije obuhvataju analizu izgaranja nuklearnog goriva, reaktorsku kinetiku i sigurnost, zatrovanje ksenonom itd. Teorija perturbacija granica u reaktorskoj fizici je primenjivana mnogo manje nego, recimo, u kvantnoj mehanici i akustici (iscrpna literatura o ovim primenama se može naći u /2/) i razvijena je tek početkom osamdesetih godina u radovima Rahmene i Pomraninga /2/-/4/ i Larsena i Pomraninga /5/. Formulirana je teorija perturbacija granica samo za stacionarne slučajeve. Kako u velikom broju primena teorije perturbacije (izgaranje nuklearnog

goriva, prelazni procesi) postoji potreba za uračunavanjem vremenske zavisnosti, u ovom radu je izvršeno proširenje teorije perturbacije granica na neke vremenski zavisne slučajeve.

2. NEPERTURBOVAN VREMENSKI ZAVISAN PROBLEM

Linearni vremenski zavisan funkcional neutronskega fluksa može se prikazati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{V(t)} \Sigma(\bar{r}, E, t) \phi(\bar{r}, E, t) dE dV dt = \\ & \int_{t_0}^{t_f} \int_{V(t)} \int_{\bar{\Omega}} \Sigma(\bar{r}, E, t) \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) d\bar{\Omega} dE dV dt \end{aligned} \quad (2.1)$$

gde $\Sigma(\bar{r}, E, t)$ obično predstavlja neki efikasni presek (za fisiju, apsorpciju, detekciju neutrona) ali može po potrebi biti i neka veličina druge prirode.

Promena neutronskega fluksa opisana je vremenski zavisnom transportnom jednačinom

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t)}{\partial t} = \mathcal{L}(\psi) \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) + q^e(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) \quad (2.2)$$

gde je \mathcal{L} transportni operator u aproksimaciji promptnih neutrona /1/, koja olakšava izvođenje, ali ne utiče na važenje izvršene generalizacije.

Vremenska zavisnost u transportnoj jednačini se aproksimira konačnim razlikama u potpuno implicitnoj formi. Energetska zavisnost je tretirana u multigrupnoj aproksimaciji. Vremenski zavisna multigrupna transportna jednačina dobija oblik

$$\begin{aligned} v^{-1} (\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_{j-1}) &= \Delta_j L_j \bar{\psi}_j = \\ \Delta_j \left\{ -H_j \bar{\psi}_j + \bar{\chi}_p \nu \bar{\Sigma}_f \int \bar{\psi}_j d\bar{\Omega} + \bar{q}_j^e \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

j=2,3,...,I

gde je H_j transportni operator u nemultiplikativnoj sredini /1/

$$H_j = \bar{\Omega} \nabla \bar{\psi}_j - \int \bar{\Sigma}_{s_j}(\bar{r}, \bar{\Omega}, \bar{\Omega}') \bar{\psi}_j(\bar{r}, \bar{\Omega}') d\bar{\Omega}' \quad (2.4)$$

a fisioni spektar potiče samo od promptnih neutrona. Svi vektori označavaju odgovarajuće multigrupne vrednosti.

U ovoj aproksimaciji funkcional (2.1) se predstavlja sumom:

$$\begin{aligned} & I-1 R \bar{\psi}_j \\ \xi_0 = \sum_{j=1} \int_0 \int_{\bar{\Omega}} \bar{\Sigma}(\bar{r}, t_j) \bar{\psi}_j(\bar{r}, \bar{\Omega}) \Delta_j d\bar{\Omega} dV \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. PERTURBACIJA MATERIJALNOG SASTAVA

Korišćenjem varijacione formulacije generalisane perturbacione teorije izveden je u /6/ izraz za promenu linearnog funkcionala fluksa usled promene materijalnog sastava, bez uračunavanja promene geometrije. Pokazano je da se promena linearnog funkcionala ξ usled promene parametra α može prikazati na sledeći način

$$\begin{aligned} \delta \xi_{\alpha} = \sum_{j=1}^{I-1} \int_0 \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \bar{\Sigma}_j}{\partial \alpha} \bar{\psi}_{j0} d\bar{\Omega} dV \Delta_j \delta \alpha \\ + \sum_{j=1}^{I-1} \int_0 \int_{\bar{\Omega}} \Delta_j \bar{\psi}_{j0}^* \frac{\partial L_j}{\partial \alpha} \bar{\psi}_{j0} dV d\bar{\Omega} \delta \alpha \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vremenski zavisne adjungovane jednačine dobijaju sledeći oblik

$$-V^{-1} (\bar{\psi}_{j+1,0}^* - \bar{\psi}_{j0}^*) = \bar{\Sigma}_j \Delta_j + \Delta_j L_j^* \bar{\psi}_{j0}^* \quad j=1,2, \quad I-1 \quad (3.2)$$

uz finalni uslov

$$\bar{\psi}_{I0}^* = 0 \quad (3.3)$$

i standardni granični uslov za adjungovani fluks

$$\bar{\psi}_{j0}^* = 0 \quad \bar{\Omega} \cdot \bar{n}_0 > 0 \quad j=1,2, \quad I-1 \quad (3.4)$$

gde je \bar{n}_0 normala na neperturbovanu površinu.

4. PERTURBACIJA GRANICA

Kako se razmatra teorija perturbacija prvog reda, uticaj različitih perturbacija je aditivan, te će ovde biti izvedeni izrazi samo za promenu linearnog funkcionala usled promene dimenzija, smatrajući da se materijalni sastav ne menja, korišćenjem metode transformacionog operatora /2/. /3/.

Sistem sa perturbovanom granicom prikazan je transportnom jednačinom diskretizovanom u vremenu (jednačine (2.3)), pri čemu sada na granici perturbovane površine važe standardni granični uslovi za gustinu neutronskog fluksa $\bar{\psi}_j$, a na neperturbovanoj granici su ovi uslovi izmenjeni.

Pretpostavićemo da se $\bar{\psi}_j$ može razviti u red po malom parametru ϵ , koji karakteriše perturbaciju

$$\bar{\psi}_j = \bar{\psi}_{j0} + \epsilon \bar{\psi}_{j1} + O(\epsilon^2) \quad (4.1)$$

Zamena (4.1) u jednačinu za linearni funkcional (2.5) daje

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 + \sum_{j=1}^{I-1} \int dV \int d\bar{\Omega} \bar{\Sigma}(\bar{r}, t_j) \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \Delta_j \\ + \epsilon \sum_{j=1}^{I-1} \int dV \int d\bar{\Omega} \bar{\Sigma}(\bar{r}, t_j) \bar{\psi}_{j1}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \Delta_j \end{aligned} \quad (4.2)$$

gde je ξ_0 neperturbovana vrednost funkcionala, a δV promena zapremine. Pošto je po pretpostavci ova promena mala, može se tačka \bar{r}_s na perturbovanoj površini povezati sa tačkom \bar{r}_{s0} na neperturbovanoj površini

$$\bar{r}_s = \bar{r}_{s0} + \epsilon X \bar{n}_0 \quad (4.3)$$

gde je, do prvog reda, \bar{n}_0 jedinična normala u tački \bar{r}_{s0} , a $X(\bar{r}_{s0})$ je rastojanje između neperturbovane površine S_0 i perturbovane površine S u normalnom pravcu. Korišćenje (4.3) u (4.2) daje

$$\begin{aligned} \xi_1 = \sum_{j=1}^{I-1} \int dS \int d\bar{\Omega} X \bar{\Sigma}(\bar{r}, t_j) \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \Delta_j \\ + \sum_{j=1}^{I-1} \int dV \int d\bar{\Omega} \bar{\Sigma}(\bar{r}, t_j) \bar{\psi}_{j1}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \Delta_j \end{aligned} \quad (4.4)$$

gde je ξ_1 promena prvog reda u funkcionalu

$$\xi = \xi_0 + \epsilon \xi_1 + O(\epsilon^2) \quad (4.5)$$

U jednačini (4.4) treba eksplicitno izraziti član koji sadrži $\bar{\psi}_{j1}$ u funkciji neperturbovanog rešenja $\bar{\psi}_{j0}$.

Analognu /2/ definisano funkcije $\bar{\zeta}(\bar{r}, \bar{\Omega})$ pomoću

$$\bar{\zeta}_j(\bar{r}, \bar{\Omega}) = T_j \bar{\psi}_j(\bar{r}, \bar{\Omega}) \quad j=2, 3, \dots, I \quad (4.6)$$

gde je T_j takav operator da važi

$$\bar{\zeta}_j(\bar{r}_{s0}, \bar{\Omega}) = 0 \quad \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.7)$$

Ako se T_j i $\bar{\zeta}_j$ razviju u red po ε dobija se

$$T_j = I + \varepsilon P_j + O(\varepsilon^2) \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.8)$$

$$\bar{\zeta}_j = \bar{\psi}_{j0} + \varepsilon \bar{\zeta}_{j1} + O(\varepsilon^2) \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.9)$$

Korišćenjem navedenih razvoja može se pokazati da važi

$$\bar{\psi}_{j1}(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \bar{\zeta}_{j1}(\bar{r}, \bar{\Omega}) - P_j \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.10)$$

Ako u jednačinama (2.3) izrazimo $\bar{\psi}_j$ pomoću (4.1) i (4.10) i izdvojimo članove nultog i prvog reda, dobijamo neperturbovanu transportnu jednačinu uz članove nultog reda, a uz članove prvog reda

$$V^{-1} \left\{ \bar{\zeta}_{j1} - P_j \bar{\psi}_{j0} - (\bar{\zeta}_{j-1,1} - P_{j-1} \bar{\psi}_{j-1,0}) \right\} \\ - \Delta_j L_j (\bar{\zeta}_{j1} - P_j \bar{\psi}_{j0}) = 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.11)$$

Granični uslov je

$$\bar{\zeta}_{j1}(\bar{r}_{s0}, \bar{\Omega}) = 0 \quad \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.12)$$

Analogno postupku u /7/ (videti izvodjenje relacije (5.18)) može se pokazati da na neperturbovanoj površini važi sa tačnošću do prvog reda aproksimacije

$$P_j \bar{\psi}_{j0} = X(\bar{x}) \bar{n}_0 \nabla \bar{\psi}_{j0} \quad \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.13)$$

Jednačine (4.10) i (4.11) daju

$$V^{-1} (\bar{\psi}_{j1} - \bar{\psi}_{j-1,1}) - \Delta_j L_j \bar{\psi}_{j1} = 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.14)$$

što znači da je jednačina za $\bar{\psi}_{j1}$ istog oblika kao i jednačina za $\bar{\psi}_j$, a na osnovu (4.10), (4.12) i (4.13) dobija se

$$\bar{\psi}_{j1}(\bar{r}_{s0}, \bar{\Omega}) = -X(\bar{r}_{s0}) \bar{n}_0 \nabla \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}_{s0}, \bar{\Omega}), \quad \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.15)$$

Postupajući na način standardan za perturbacionu teoriju (unakrsnim množenjem direktnih i adjungovanih perturbovanih i

neperturbovanih jednačina, oduzimanjem i korišćenjem graničnih i finalnih uslova) dobija se u /8/

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^{I-1} \int_{V_0} \int_{4\pi} \Delta_j \bar{\psi}_{j1} L_j^* \bar{\psi}_{j0}^* \bar{\alpha} \bar{\nu} dV - \sum_{j=1}^{I-1} \int_{V_0} \int_{4\pi} \Delta_j \bar{\psi}_{j0}^* L_j \bar{\psi}_{j1} \bar{\alpha} \bar{\nu} dV \\
 & + \sum_{j=1}^{I-1} \int_{V_0} \int_{4\pi} \Delta_j \bar{\Sigma}_j \bar{\psi}_{j1} \bar{\alpha} \bar{\nu} dV = 0 \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

U toku izvodjenja relacije (4.16) mora se pretpostaviti da je promena zapremine u dva sukcesivna vremenska koraka dovoljno mala, te da se susedni integralni članovi sa vremenskim razlikama mogu poništavati. Kako aproksimacija implicitnih konačnih razlika primenjena za rešavanje transportne jednačine zahteva veoma mali korak, možemo smatrati da je navedena pretpostavka opravdana.

Koristeći osobinu komutativnosti adjungovanog operatora u opštem obliku /1/ na neperturbovanoj površini S_0 , gde se sada ne anulira neutronski fluks, dobija se

$$\sum_{j=1}^{I-1} \int_{V_0} \int_{4\pi} \Delta_j \bar{\Sigma}_j \bar{\psi}_{j1} dV \bar{\alpha} \bar{\nu} = - \sum_{j=1}^{I-1} \int_{S_0, \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0} d\bar{S} \bar{\psi}_{j0}^* \bar{\psi}_{j1} \bar{n}_0 \bar{\Omega} \Delta_j \quad (4.17)$$

a na osnovu (4.15)

$$\sum_{j=1}^{I-1} \int_{V_0} \int_{4\pi} \Delta_j \bar{\Sigma}_j \bar{\psi}_{j1} dV \bar{\alpha} \bar{\nu} = \sum_{j=1}^{I-1} \int_{S_0, \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0} d\bar{S} \bar{\alpha} \bar{\nu} (\bar{n}_0 \bar{\Omega}) \times (\bar{r}_{s0}) \bar{\psi}_{j0}^* \bar{n}_0 \bar{\nu} \bar{\psi}_{j0} \Delta_j \quad (4.18)$$

Kako je

$$(\bar{n}_0 \bar{\Omega}) \bar{n}_0 \nabla \bar{\psi}_{j0} = \bar{\Omega} \nabla \bar{\psi}_{j0} \quad \bar{n}_0 \bar{\Omega} < 0 \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.19)$$

to se iz definicije transportnog operatora (2.4) i jednačina (2.3) dobija

$$\begin{aligned}
 & (\bar{n}_0 \bar{\Omega}) \bar{n}_0 \nabla \bar{\psi}_{j0} \Delta_j = \bar{q}_j^e(\bar{r}, \bar{\Omega}) \Delta_j + \int_{4\pi} d\bar{\Omega}' \bar{\Sigma}_{sj}(\bar{r}, \bar{\Omega} \bar{\Omega}') \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \\
 & + \bar{\chi}_p \nu \bar{\Sigma}_{fj} \int_{4\pi} \bar{\psi}_j \bar{\alpha} \bar{\nu} \Delta_j - V^{-1} (\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_{j-1}) \quad j=2,3,\dots,I \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

pa se zamenom u (4.18) dobija

$$\sum_{i=1}^{I-1} \int_{V_0} \int_{4\pi} dV \, d\bar{\omega} \, \bar{\Sigma}_j \, \bar{\psi}_{j0} \, \Delta_j = \sum_{i=1}^{I-1} \int_{S_0} \int_{4\pi} d\bar{s} \, X(\bar{r}_{S_0}) \, d\bar{\omega} \, \bar{\psi}_{j0}^* \Delta_j \left\{ \bar{q}_j^e(\bar{r}, \bar{\omega}) \right. \\ \left. + \int_{4\pi} d\bar{\omega}' \, \bar{\Sigma}_s(\bar{\omega}, \bar{\omega}') \, \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\omega}') + \bar{\chi}_p \nu \bar{\Sigma}_{fj} \int_{4\pi} d\bar{\omega} \, \bar{\psi}_{j0} \right\} \quad (4.21)$$

Članovi koji potiču od vremenskih razlika se potiru pod istim uslovima koji su navedeni uz izvodjenje (4.16).

Kada se ova jednačina pomnoži sa ϵ i upotrebi relacija $\delta R = \epsilon X(\bar{r}_{S_0})$ za sfernosimetričan sistem (lako se primenjuju i druge geometrije), pa se uvrsti u izraz za promenu linearnog funkcionala usled promene dimenzija sistema (4.4), pri čemu se definiše $\delta \bar{\Sigma}_{\delta R} = \epsilon \bar{\Sigma}_1$, dobija se

$$\delta \bar{\Sigma}_{\delta R} = \sum_{j=1}^{I-1} \int_{S_0} \int_{4\pi} d\bar{s} \, d\bar{\omega} \, \bar{\Sigma}_j \, \bar{\psi}_{j0} \, \Delta_j \, \delta R_j + \sum_{j=1}^{I-1} \int_{S_0} \int_{4\pi} d\bar{s} \, d\bar{\omega} \, \bar{\psi}_{j0}^* \, \Delta_j \left\{ \bar{q}_j^e(\bar{r}, \bar{\omega}) \right. \\ \left. + \int_{4\pi} d\bar{\omega}' \, \bar{\Sigma}_s(\bar{\omega}, \bar{\omega}') \, \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\omega}') + \bar{\chi}_p \nu \bar{\Sigma}_{fj} \int_{4\pi} d\bar{\omega} \, \bar{\psi}_{j0} \right\} \delta R_j \quad (4.22)$$

Ukoliko se menjaju i materijalni sastav i dimenzije sistema, ukupna promena linearnog funkcionala se može dobiti kao suma izraza (3.1) i (4.22) :

$$\delta \bar{\Sigma} = \sum_{j=1}^{I-1} \int_0^{R_j} \int_{4\pi} \frac{\partial \bar{\Sigma}_j}{\partial \alpha} \bar{\psi}_{j0} \, d\bar{\omega} \, dV \, \Delta_j \, \delta \alpha + \sum_{j=10}^{I-1} \int_{4\pi} \Delta_j \, \bar{\psi}_{j0}^* \frac{\partial I_j}{\partial \alpha} \bar{\psi}_{j0} \, d\bar{\omega} \, dV \, \delta \alpha \\ + \sum_{j=1}^{I-1} \int_{S_0} \int_{4\pi} d\bar{s} \, d\bar{\omega} \, \bar{\Sigma}_j \, \bar{\psi}_{j0} \, \Delta_j \, \delta R_j + \sum_{j=1}^{I-1} \int_{S_0} \int_{4\pi} d\bar{s} \, d\bar{\omega} \, \bar{\psi}_{j0}^* \, \Delta_j \left\{ \bar{q}_j^e(\bar{r}, \bar{\omega}) \right. \\ \left. + \int_{4\pi} d\bar{\omega}' \, \bar{\Sigma}_s(\bar{\omega}, \bar{\omega}') \, \bar{\psi}_{j0}(\bar{r}, \bar{\omega}') + \bar{\chi}_p \nu \bar{\Sigma}_{fj} \int_{4\pi} d\bar{\omega} \, \bar{\psi}_{j0} \right\} \delta R_j \quad (4.23)$$

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu su poznati perturbacioni izrazi za promenu linearnog funkcionala neutronskog fluksa usled promene materijalnog sastava i dimenzija sistema prošireni na vremenski zavisani slučaj. Pošto se radi o aproksimaciji prvog reda, moraju promene granica i materijalnog sastava biti spore ili se rešavanje vremenski zavisne transportne jednačine mora vršiti u malim koracima. Proračun perturbacije linearnog funkcionala usled promene geometrijskih parametara vrši se korišćenjem istih adjungovanih jednačina, kao i kada se menja samo materijalni sastav, odnosno svodi se na integraciju poznatih funkcija i time se postiže potpun efekat primene teorije perturbacije. Dobijeni izrazi se mogu primeniti za procenu efekata različitih vremenski zavisnih perturbacija u materijalnom sastavu i geometriji u toku izgaranja, kinetičkih i dinamičkih prelaznih procesa, pa i u analizi akcidenata pod navedenim uslovima sukcesivne primene malih perturbacija.

R E F E R E N C E

- /1/ E.E.Lewis, W.F.Miller: "Computational Methods of Neutron Transport", John Wiley & Sons, New York (1984)
- /2/ F.Rahnema, G.C.Pomraning: "External Boundary Perturbations in Neutron Transport Theory", J.Math.Phys, 24, 687 (1983)
- /3/ F.Rahnema, G.C.Pomraning: "Boundary Perturbation Theory for Inhomogeneous Transport Equations", Nucl.Sci.Eng, 84, 313 (1983)
- /4/ F.Rahnema: "Internal Interface Perturbations in Neutron Transport Theory", Nucl.Sci.Eng, 78, 393 (1981)
- /5/ E.W.Larsen, G.C.Pomraning: "Boundary Perturbation Theory", Nucl.Sci.Eng, 77,415 (1981)
- /6/ N.Zavaljevski: "Analiza osetljivosti vremenski zavisnih linearnih funkcionala fluksa na promenu materijalnih parametara sistema", IBK-NET-44, Vinča (1989)
- /7/ N.Zavaljevski: "Analiza mogućnosti primene postojećih metodologija teorije perturbacija u sistemima sa promenljivim granicama na analizu osetljivosti vremenski zavisnih funkcionala fluksa", IBK-NET-57, Vinča (1990)
- /8/ N.Zavaljevski: "Teorijski model za proračun koeficijenata osetljivosti vremenski zavisnih linearnih funkcionala neutronskog fluksa na promenu geometrijskih parametara sistema", IBK-NET-56, Vinča (1990)