Aleksandar Zavaljevski

Institut za nuklearne nauke "Boris Kidrič" - Vinča

Institut za računarsku tehniku "RT", P. fah 522, 11000 Beograd

SINTEZA FIR FILTARA SA SMANJENOM OSETLJIVOŠĆU NA VARIJACIJE KOEFICIJENATA

SYNTHESIS OF FIR FILTERS WITH REDUCED COEFFICIENT SENSITIVITY

SADRŽAJ: U radu su izvedeni opšti izrazi po kojima mogu da se odrede koeficijenti FIR filtara koji imaju minimalnu osetljivost na varijacije koeficijenata u zadatom opsegu. Predložen je i jedan računski jednostavan postupak pomoću koga mogu da se odrede koeficijenti FIR filtara sa smanjenom osetljivošću na varijacije koeficijenata. Izloženi su i rezultati primene ovog postupka na neke konkretne primere FIR filtara.

ABSTRACT: In this paper general equations for FIR filters with minimum coefficient sensitivity synthesis are derived. A computationally simple method for calculation of FIR filters with smaller coefficient sensitivity is proposed. The results of application of the proposed method for improving coefficient sensitivity of FIR filters are presented.

1. UVOD

Digitalni filtri predstavljaju jedan od fundamenata celokupne digitalne obrade signala. Samim tim su i postupci njihove sinteze od velikog značaja, i toj problematici je posvećena obimna literatura, npr. [1]-[3]. Razradjeni su postupci sinteze filtara prema različitim kriterijumima kao što su minimalna srednja kvadratna greška, minimalna maksimalna greška itd. Medjutim, svi ti metodi su orijentisani na sintezu filtara sa fiksnim koeficijentima, dok je sintezi filtara koji su optimalni po nekom kriterijumu i u slučaju odredjene varijacije koeficijenata posvećena minimalna pažnja, npr. [4].

Problem anlize i sinteze FIR filtara kod kojih su moguće odredjene varijacije koeficijenata ima praktičnog značaja kod obrade seizmičkih odnosno geofizičkih signala. Tu se na različite načine vrši pobuda zemljine kore, a odzivi se mere pomoću niza ekvidistantnih senzora koji se postavljaju po površini zemlje ili se ugradjuju na specijalne sajle koje vuku brodovi u slučaju ispitivanja vodenih površina. Tada zbir odziva ostvaruje funkciju digitalnih filtara. U slučaju ovakve realizacije FIR filtara, moguće su varijacije pojačanja senzora, što odgovara promenama koeficijenata FIR filtara, ili varijacije udaljenosti izmedju senzora, što odgovara promenama faznih članova FIR filtara.

2. OPTIMIZACIJA KOEFICIJENATA FIR FILTARA

U ovom radu razmatraće se FIR filtri, čija je frekventna karakteristika data sa:

$$H(\omega)= \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\omega n} \tag{1}$$

Za različite primene postoje različite funkcije poželjnog frekventnog odziva, označimo ih sa $P(\omega)$, koje su definisane na nekom skupu učestanosti Ω. Tu su definisani različiti kriterijumi za meru aproksimiranja funkcije $P(\omega)$ funkcijom $H(\omega)$, kao što su kriterijum mininalne srednje kvadratne greške, minimalne maksimalne greške i sl. Dalje se logično nameće problem nalaženja takvih koeficijenata filtra h_n da se postigne najbolja aproksimacija u izabranom smislu. U ovom radu će biti razmatran kriterijum minimalne maksimalne greške, tj. optimizacija u smislu Čebiševa:

$$\operatorname*{Min}_{\underline{h}} \ \operatorname*{Sup}_{\omega\in\Omega} \ W(\omega) | P(\omega) - H(\omega) | \tag{2}$$

gde je $\underline{h}$ skup koeficijenata filtra, $\underline{h} = [h_0, h_1, \dots , h_n]$, a $W(\omega)$ težinska funkcija. Problem nalaženja skupa takvih koeficijenata filtra h_n da je postignut minimum u (2) može se rešiti Remez exchange algoritmom, koji problem minimizacije svodi na rešavanje predefinisanog sistema linearnih jednačina. Ovde moramo napomenuti da, obzirom da se u radu tretiraju slučajevi kada dolazi do varijacije koeficijenata, to se ne može postići da su filtri uvek linearne faze, pa se zbog toga svuda koristi metod kompleksne aproksimacije. Naime, nalaženje minimuma iz (2) ekvivalentno je nalaženju sledećeg minimuma:

$$\operatorname*{Min}_{\underline{h}} \ \operatorname*{Sup}_{\omega\in\Omega} \ \operatorname*{Sup}_{0\le\theta\le2\pi} \ W(\omega) \operatorname{Re} \{ [P(\omega) - H(\omega)] e^{j\theta} \} \tag{3}$$

što se pak, u slučaju diskretizacije ω na K, a ugla θ na 2P tačaka svodi na rešavanje sistema od $K \cdot P$ linearnih jednačina oblika:

$$W(\omega_k) \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(n\omega_k - \Theta_p) = W(\omega_k)[P_r(\omega_k)\cos\Theta_p - P_i(\omega_k)\sin\Theta_p] \quad (4)$$

gde je $k = 1, 2, \ldots, K$, $p = 1, 2, \ldots, P$, a $P_r(\omega)$ realni i $P_i(\omega)$ imaginarni deo od $P(\omega)$.

Red sistema $K \cdot P$ za slučajeve koji se susreću u praksi je uglavnom prihvatljivsa stanovišta obima izračunavanja koja se javljaju prilikom rešavanja sistema.U slučaju varijacije koeficijenata filtra frekventna karakteristika filtra data je sa:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n(1+\delta_n) e^{-j\omega n(1+\varepsilon_n)} \quad (5)$$

gde su δ_n i ε_n nepoznate konstante za koje važe ograničenja $| \delta_n | \leq \Delta$ i $| \varepsilon_n | \leq \Sigma$. Sada problem nalaženja minimuma iz (2) postaje:

$$\underset{\underline{h}}{\text{Min}} \ \underset{\omega\in\Omega}{\text{Sup}} \ \underset{\underline{\delta}}{\text{Sup}} \ \underset{\underline{\varepsilon}}{\text{Sup}} \ W(\omega)| P(\omega) - H(\omega) | \quad (6)$$

gde je $\underline{\delta}$ skup devijacija koeficijenata $\underline{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{N-1}]$, a $\underline{\varepsilon}$ skup devijacija faznih članova $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1}]$. Slično kao i kod (3), ovo je ekvivalentno sa:

$$\underset{\underline{h}}{\text{Min}} \ \underset{\underline{\delta}}{\text{Sup}} \ \underset{\underline{\varepsilon}}{\text{Sup}} \ \underset{\omega\in\Omega}{\text{Sup}} \ \underset{0\leq\Theta\leq2\pi}{\text{Sup}} \ W(\omega) \operatorname{Re} \{ [P(\omega) - H(\omega)] e^{j\Theta} \} \quad (7)$$

Maksimalna greška u smislu Čebiševa se dostiže na granicama intervala za svako δ_i i ε_i, tj. kada oni imaju vrednosti $\mp\Delta$ odnosno $\mp\Sigma$. Na taj način dolazi se do 2^N nizova od po N elemenata, čiji su elementi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ a imaju vrednosti $+\Delta$ odnosno $-\Delta$ i analogno 2^N nizova sa elementima $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ i vrednostima $+\Sigma$ odnosno $-\Sigma$. Neka su oznake za skupove tih nizova $\underline{\delta}^g$ odnosno $\underline{\varepsilon}^g$. Sada se uslov (7) može ekvivalentno izraziti kao:

$$\underset{h}{\text{Min}} \ \underset{\underline{\delta}^g}{\text{Sup}} \ \underset{\underline{\varepsilon}^g}{\text{Sup}} \ \underset{\omega\in\Omega}{\text{Sup}} \ \underset{0\leq\Theta\leq2\Pi}{\text{Sup}} \ W(\omega) \operatorname{Re} \{ [P(\omega)-H(\omega)] e^{j\Theta} \} \quad (8)$$

Kada se ovde, kao u slučaju za (4) izvrši diskretizacija ω na K, a ugla Θ na 2P tačaka, nalaženje minimuma se svodi na rešavanje sistema od $K \cdot P \cdot 2^{2N}$ jednačina oblika:

$$W(\omega_k) \sum_{n=0}^{N-1} h_n(1+\delta_n^i)\cos(n(1+\varepsilon_n^j)\omega_k - \Theta_p) = W(\omega_k)[P_r(\omega_k)\cos\Theta_p - P_i(\omega_k)\sin\Theta_p] \quad (9)$$

gde je $k = 1, 2, \ldots, K$; $p = 1, 2, \ldots, P$; $i = 1, 2, \ldots, 2^N$ i $j = 1, 2, \ldots, 2^N$.

Sistem od $K \cdot P \cdot 2^{2N}$ jednačina za razliku od sistema (4) ima veoma visok red. Količina izračunavanja za veće vrednosti N predstavlja dugotrajan posao čak i za najveće računare.

Zbog svega toga ima smisla definisanje alternativnih algoritama za nalaženje rešenja postavljenog problema. U tom smislu su od interesa kako postupci za nalaženje optimalnog, tako i suboptimalnih rešenja, koji bi imali zadovoljavajuću tačnost, a sa stanovišta potrebne količine izračunavanja, u slučajevima koji se sreću u praksi, imali prihvatljive dimenzije. U ovom radu se iznosi jedan takav algoritam za nalaženje suboptimalnog rešenja problema.

3. SINTEZA FILTARA SA SMANJENOM OSETLJIVOŠĆU

Osnovna teškoća koja se javlja kod optimizacije koeficijenata FIR filtra prema formulama (9) je veoma visok red sistema, $K \cdot P \cdot 2^{2N}$. Postoji nekoliko načina kako može da se smanji dimenzionalnost problema, a jedan od njih biće izložen u ovom radu.

Kod optimizacije koeficijenata za primenu u praksi, a i metodološki, razlikuju se slučajevi kada su moguće varijacije samo koeficijenata h_n FIR filtra, kada su moguće varijacije samo faznih članova n, i na kraju, kada su istovremeno moguće varijacije koeficijenata h_n i faznih članova n. Jasno je do kakvih pojednostavljenja dolazi u jednačinama (9) u slučajevima da su moguće varijacije samo koeficijenata h_n filtra ili samo faznih članova n. U tim slučajevima red sistema je $K \cdot P \cdot 2^N$ što je znatno manje nego u slučaju da je moguća varijacija svega, kao u (9), ali je i dalje veoma visok, što daje smisao nalaženju postupaka za njegovo snižavanje.

Za sva ova tri slučaja zajednička je opšta ideja o dekompoziciji problema optimizacije sa ciljem snižavanja reda problema. U tom smislu prvo se nalaze koeficijenti filtra koji je optimalan u klasičnom smislu, sa minimalnom maksimalnom greškom u slučaju bez varijacije koeficijenata h_n i faznih članova n, prema formulama (5). Za ovo je potrebno rešiti sistem od $K \cdot P$ jednačina. Dalja optimizacija koeficijenata h_n vrši se u n-dimenzionom prostoru tih koeficijenata. Kompleksnost izračunavanja u slučaju varijacije samo koeficijenata h_n ili samo faznih članova n je proporcionalna sa 2^N, a u slučaju varijacije i jednih i drugih proporcionalna sa 2^{2N}.

Sve ovo zajedno znači da je postupak čija je kompleksnost izračunavanja proporcionalna sa $P \cdot K \cdot 2^N$, odnosno $P \cdot K \cdot 2^{2N}$, aproksimiran sukcesivnom primenom postupaka čije su kompleksnosti izračunavanja proporcionalne sa $P \cdot K$ i 2^N, odnosno $P \cdot K$ i 2^{2N}, što predstavlja značajnu uštedu računarskog vremena. Ovo veoma često predstavlja i jedinu mogućnost da se problem uopšte reši, jer mnogi računari uopšte ni ne mogu da prihvate rešavanje sistema jednačina reda $P \cdot K \cdot 2^{2N}$ koji može da bude znatan za filtre koji se koriste u praksi.

U slučaju varijacije samo koeficijenata h_n optimizacija počinje standardno, tako što se odredjuju koeficijenti h_{no} iz sistema jednačina (5). Označimo sa H_{NO} tako dobijenu tačku N dimenzionog prostora koeficijenata h_n: $H_{NO}=[h_{1o}, h_{2o}, \dots, h_{No}]$.

Dalja optimizacija vrši se u N-dimenzionom prostoru koeficijenata h_n i za dalji rad potrebno je uvesti dve definicije funkcija u ovom prostoru. Neka je $F_G(h_1, h_2, \dots, h_N)$ funkcija koja ima vrednost maksimalne greške frekventnog odziva FIR filtra sa koeficijentima h_1, h_2, ..., h_N, i neka je $F_{GI}(h_1, h_2, \dots, h_N)$ funkcija koja ima vrednost maksimuma maksimalnih grešaka svih FIR filtara čiji koeficijenti pripadaju intervalima: $h_n \in [h_n(1-\Delta), h_n(1+\Delta)]$.

Uz ovakvu definiciju, problem koji se tretira u ovom radu svodi se na nalaženje minimuma funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \dots, h_N)$, a tačka $[h_1, h_2, \dots, h_N]$ u kojoj je postignut minimum ustvari odredjuje koeficijente filtra sa traženim svojstvom. Postupci za nalaženje minimuma N dimenzione funkcije su poznati i dobro obradjeni u literaturi, npr. [5] i [6], i njihovom prostom primenom može se doći do rešenja problema. Medjutim, u opštem slučaju i samo izračunavanje vrednosti funkcije F_{GI} je računski veoma obiman posao, obzirom na veliku dimenzionalnost problema.

Pošto se u praktičnim primenama javljaju relativno male varijacije koeficijenata filtara, to i postupci sinteze optimalnih FIR filtara za slučaj malih varijacija koeficijenata imaju najveći praktični značaj. Zbog neprekidnosti funkcije $F_G(h_1, h_2, \dots, h_N)$ i ograničenosti njenih parcijalnih izvoda, za svaku tačku $(h_{1o}, h_{2o}, \dots, h_{No})$ N dimenzionog prostora koeficijenata (izuzev tačaka u kojima se po nekoj od promenljivih postiže maksimum), postoji takvo Δ_o da funkcija $F_{GI}(h_{1o}, h_{2o}, \dots, h_{No})$ ima vrednost jednaku vrednosti funkcije $F_G(h_1, h_2, \dots, h_N)$ u nekom od temena hiperparalelograma opisanog nejednakostima:

$$h_{io}(1-\Delta_o) \le h_i \le h_{io}(1+\Delta_o) \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (10)$$

Ograničenje da se u tački ne postiže maksimum po nekoj od promenljivih h_i nije previše značajno zbog toga što se u postupku polazi od globalnog minimuma funkcije $F_G(h_1, h_2, \ldots, h_N)$. U tom slučaju vrednost funkcije $F_{GI}(h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No})$ se može naći kao maksimum frednosti funkcije $F_G(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ u temenima hiperparalograma opisanog nejednakostima (10).

Uz ovakav postupak izračunavanja vrednosti funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$, njen minimum je moguće naći nekim od klasičnih postupaka, npr. [5] i [6], a samim tim i koeficijente traženog filtra. Ovakvi postupci dovode do optimalnog rešenja, ali imaju jedan nedostatak što uglavnom zahtevaju relativno veliki broj izračunavanja vrednosti funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$, što i pored uvedenih pojednostavljenja, za veće vrednosti N predstavlja obiman računarski posao.

Medjutim, postupak izračunavanja vrednosti funkcije $F_{GI}(h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No})$ preko vrednosti funkcije $F_G(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ u temenima hiperparalelograma daje mogućnost formulisanja jednostavnog postupka za aproksimativno nalaženje minimuma funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$. Kada poznajemo teme hiperparalelograma $[h_{1m}, h_{2m}, \ldots, h_{Nm}]$ u kome funkcija $F_G(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ ima maksimalnu vrednost, onda nalaženje minimuma funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ može da se traži u jednodimenzionom umesto u N dimenzionom prostoru, i to po hiperpravoj koja spaja tačke $[h_{1m}, h_{2m}, \ldots, h_{Nm}]$, $[h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No}]$ i $[h_{1s}, h_{2s}, \ldots, h_{Ns}]$ (tačka simetrična tački $[h_{1m}, h_{2m}, \ldots, h_{Nm}]$ u odnosu na $[h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No}]$.

Sada je osnovna ideja postupka da se na toj hiperpravoj nadje nova centralna tačka $[h_{1n}, h_{2n}, \ldots, h_{Nn}]$, takva da u temenima hiperparalelograma koji pripadaju toj pravoj vrednosti funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ budu jednake. Ukoliko se predpostavi da je funkcija $F_G(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ u intervalima ($[h_{1m}, h_{2m}, \ldots, h_{Nm}]$, $[h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No}]$) i ($[h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No}]$, $[h_{1s}, h_{2s}, \ldots, h_{Ns}]$) linearna, onda se za postizanje jednakosti vrednosti funkcija u odgovarajućim temenima hiperparalelograma za tačku H_{NO} dobija pomeraj za svaki koeficijent h_i posebno:

$$P_i = \frac{(B+C)(B-C)}{4BC} h_{io}\Delta_o \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (11)$$

gde je:

$$B = F_G(h_{1m}, h_{2m}, \ldots, h_{Nm}) - F_G(h_{1o}, h_{2o}, \ldots, h_{No})$$

$$C = F_G(h_{1s}, h_{2s}, \dots, h_{Ns}) - F_G(h_{1o}, h_{2o}, \dots, h_{No})$$

i konačno:

$$h_i = h_{io} + P_i \qquad i = 1, 2, \dots, N \tag{12}$$

Na ovaj način ne dobija se globalni minimum funkcije $F_{GI}(h_1, h_2, \dots, h_N)$, ali se dobijaju koeficijenti filtra sa smanjenom osetljivošću na varijacije koeficijenata u odnosu na početni.

4. REZULTATI

Izloženi postupak ilustrovaće se na primerima FIR filtara niskopropusnika opsega. Sinteza osnovnih FIR filtara uradjena je primenom metode kompleksne aproksimacije, tačnije algoritma 495, [7]. Osnovne specifikacije svih filtara su: propusni opseg 0,0 - 0,0996 (željena vrednost funkcije 1), nepropusni opseg 0,1484 - 0,5 (željena vrednost funkcije 0) i oba opsega imaju jednake težine, 1. Radjeno je sa filtrima 9., 11. i 13. reda, a predvidjene maksimalne varijacije koeficijenata filtara bile su 0,1 i 0,05. Rezultati primene algoritma prikazani su u tabeli 1, gde su redom dati red filtra, maksimalna varijacija koeficijenata, maksimalna greška početnog filtra za slučaj dozvoljene varijacije koeficijenata, i maksimalna greška novog filtra koji je dobijen predloženim postupkom.

red filtra	varijacija koeficienata	maksimalna početna greška	maksimalna nova greška
9	0,05	0,32476	0,31862
9	0,1	0,39879	0,38828
11	0,05	0,25287	0,24174
11	0,1	0,32496	0,29940
13	0,05	0,20333	0,19692
13	0,1	0,27708	0,26307

Tabela 1

Vidi se da je kod svih novih filtara maksimalna greška manja od maksimalne greške kod starih, što znači da su dobijeni filtri sa smanjenom osetljivošću na varijacije koeficienata.

5. ZAKLJUČAK

U radu su izvedene opšte formule koje mogu da se primene za optimizaciju, digitalnih FIR filtara u slučaju varijacije njihovih koeficijenata. Predložen je i jedan jednostavniji postupak za nalaženje koeficijenata FIR filtara sa smanjenom osetljivošću na varijacije koeficijenata. Literatura koja tretira ovu problematiku je oskudna, npr. [4], ali ni tu svi rezultati nisu sasvim korektni, tako da je teško dati meritorno uporedjenje dobijenih rezultata sa prethodnim.

Predloženi postupak pruža mogućnosti daljeg rada koji bi uključivao njegovu višestruku primenu sa ciljem poboljšanja tačnosti, kao i uzimanje većeg broja tačaka iz prostora koeficijenata filtra prilikom odredjivanja podprostora u kome će se vršiti optimizacija.

6. LITERATURA

[1] L. R. Rabiner, B. Gold, "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Inc., 1975.,

[2] T. W. Parks, C. S. Burrus, "Digital Filter Design", 1987.,

[3] L. B. Jackson, "Digital Filters and Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, 1986.,

[4] T. L. Marzeta, T. W. Parks, X. K. Chen, "FIR filters with minimum coefficient sensitivity", ICASSP, Tokyo, 1986.,

[5] E. Polak, "Computational Methods in Optimization", New York Academic Press, 1971

[6] D. A. Jacobs, "The state of the Art in Numerical Analysis", London Academic Press, 1977,

[7] X. K. Chen, T. W. Parks, "Design of FIR Filters in the Complex Domain", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-35, No. 2, februar 1987.