XXXII JUGOSLOVENSKA KONFERENCIJA ETAN-a, S A R A J E V O, 6—10. JUNA 1988.

Igor Zmijarević, Djordje Tomašević
Institut "Boris Kidrič" - Vinča
P. Fah 522, 11001 Beograd

UBRZANJE SPOLJAŠNJIH ITERACIJA DIFUZIONOG NODALNOG PRORAČUNA ČEBIŠEVLJEVOM EKSTRAPOLACIONOM METODOM

ACCELERATION OF NODAL DIFFUSION CODE BY CHEBYCHEV POLYNOMIAL EXTRAPOLATION METHOD

SADRZAJ - U radu je prikazana Čebiševljeva ekstrapolaciona metoda za ubrzanje iterativnog postupka primenjena na difuzioni proračun u nodalnoj aproksimaciji visoke tačnosti. Parametri ubrzanja odredjeni su na osnovu integralne vrednosti fisionog izvora u čvorovima, jedinstveni za sve koeficijente rešenja. Prikazani su primeri proračuna i efikasnost metode.

ABSTRACT - This paper presents Chebichev acceleration of outer iterations of a nodal diffusion code of high accuracy. Extrapolation parameters, unique for all moments are calculated using the node integrated distribution of fission source. Sample calculations are presented indicating the efficiency of method.

1. UVOD

Uobičajeni postupak rešavanja multigrupne transportne ili difuzione jednačine koja je formulisana kao problem sa sopstvenom vrednošću uključuje metod iteracije izvora. Brzina konvergencije spoljašnjih iteracija, za koju je poznato da zavisi od odnosa prve dve sopstvene vrednosti sistema [3,4], moze biti veoma mala. To je posebno od značaja u slučaju proračuna lakovodnih energetskih reaktora, gde je odnos prve dve sopstvene vrednosti vrlo blizak jedinici, te je broj spoljašnjih iteracija reda nekoliko stotina. Zbog toga se potreba za ubrzanjem iterativnog postupka pokazala nužna da bi se proračuni energetskih reaktora učinili efikasnim. Razvijeno je do sada više metoda ubrzanja kao što su ekstrapolacione metode, metod rebalansa na gruboj mreži i sintetička akceleracija. U ovom radu prikazana je efikasnost Čebiševljeve ekstrapolacione metode sa dva parametra za ubrzanje multigrupnog difuzionog proračuna u nodalnoj aproksimaciji. Ovde je raspodela fisionog izvora na koju se primenjuje ubrzanje izražena u obliku razvoja u red po Ležandrovim polinomima, a parametri ubrzanja se odredjuju na osnovu raspodele integralnih vrednosti fisionog izvora po čvorovima.

2. POSTUPAK UBRZAVANJA

Standardna iterativna šema u kojoj se sukcesivno odredjuju vrednosti vektora fisionog izvora $F^{(l)}$ i konstante multiplikacije $k^{(l)}$ može se prikazati u obliku

$$F^{(l+1)} = \frac{1}{k^{(l)}} A\, F^{(l)}, \qquad k^{(l+1)} = k^{(l)} \langle F^{(l+1)} \rangle / \langle F^{(l)} \rangle, \tag{1}$$

gde operator A ukljucuje invertovani transportni ili difuzioni operator. Čebiševljeva ekstrapolaciona šema sa dva parametra ima oblik

$$\tilde{F}^{(l+1)} = \frac{1}{k^{(l)}} A\, F^{(l)}, \tag{2}$$

$$F^{(l+1)} = F^{(l)} + \alpha_l (\tilde{F}^{(l+1)} - F^{(l)}) + \beta_l (F^{(l)} - F^{(l-1)}) \tag{3}$$

Koeficijenti α i β zavise od indeksa iteracije i odredjuju se tako da se brzina konvergencije maksimizira. Koristeći Čebiševljevu teoriju minimizacije razlike izmedju vrednosti vektora fisionog izvora u dve iteracije dobija se rekurentna relacija za ekstrapolacione koeficijente [4]:

$$\alpha_l = \left[\frac{2-d}{2} - \frac{d^2}{16}\alpha_{l-1}\right]^{-1}, \quad \beta_l = \frac{2-d}{2}\alpha_l - 1, \quad \alpha_o = 0, \ \beta_o = 0, \quad (4)$$

gde d predstavlja odnos prve dve sopstvene vrednosti sistema. Vrednost koeficijenta d procenjuje se na osnovu razlike raspodele izvora u dve sukcesivne iteracije prema relaciji

$$d = \left[\langle(\tilde{F}^{(l+1)} - F^{(l)})^2\rangle \,/\, \langle(F^{(l)} - F^{(l-1)})^2\rangle\right]^{1/2} \quad (5)$$

Pošto je koeficijent d posle prvih nekoliko iteracija na ovaj nacin odredjen samo aproksimativno, u toku iterativnog procesa koriste se nove izračunate vrednosti koeficijenta pri čemu je potrebno reinicijalizirati postupak ubrzanja, odnosno započeti novi rekurentni postupak za odredjivanje ekstapolacionih parametara α i β. Optimum za kriterijum reinicijalizacije zavisi od karakteristika problema.

Ovakav postupak ubrzanja ugradjen je u nodalni difuzioni program CASTOR [1,2]. Prema ovom modelu fluks unutar čvora u odredjenoj grupi predstavljen je razvojem u red Ležandrovih polinoma po transverzalnim koordinatama. U dvodimenzionom slučaju izraz za fluks u čvoru dimenzija $(\Delta x, \Delta y)$ ima oblik:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) P_n(x') + \sum_{m=0}^{M} g_m(y) P_m(y') - \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} c_{mn} P_m(x') P_n(y')$$

gde je $x' = 2x/\Delta x$, $y' = 2y/\Delta y$, a funkcije f_n i g_m su rešenja kvazi-jednodimenzione difuzione jednacine oblika:

$$f_n(x) = X_1^n \, ch(K_n x) + X_2^n \, sh(K_n x) + \sum_{i=0}^{I} b^{ni} P_i(x'). \quad (7)$$

Koeficijenti X i b^{ni} kao i odgovarajuci transverzalni, zavise od parametara i raspodele izvora odgovarajucih kvazi - jednodimenzionalnih difuzionih jednačina u tekućoj spoljašnjoj iteraciji. Ne upuštajući se u brzinu konvergencije pojedinih momenata u razvoju rešenja, ekstrapolacioni koeficijenti su izračunati na osnovu integralnih vrednosti fisionog izvora koji unutar čvora (i,j) ima oblik:

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_h (\nu\Sigma_f^h)_{ij}' \left\{ \frac{1}{x_o'} X_{1ij}^{o,h} \, sh(x_o') + {}^x b_{ij}^{oo} + \frac{1}{y_o'} Y_{1ij}^{o,h} \, sh(y_o') + {}^y b_{ij}^{oo} \right\}$$

gde indeks h označava grupu a $x_o' = {}^xK_{ij}' \Delta x_i / 2$, $y_o' = {}^yK_{ij}' \Delta y_j / 2$. Ova raspodela izvora koristi se direktno za odredjivanje ekstrapolacionih parametara prema (5) i (4), te se ekstrapolacija svih koeficijenata X_k^n, Y_k^n (k=1,2) i b^{ni} vrši koristeći iste parametre α i β prema jednačini (3). Ovakav način ubrzanja obezbedjuje očuvanje bilansa neutrona i konvergenciju rešenja ka rešenju neubrzanog iterativnog postupka.

3. PRIMERI PRORAČUNA

Izvršena je serija jednodimenzionih i dvodimenzionih proračuna na kojima je ispitana efikasnost iterativnog postupka sa ubrzanjem. U prikazanim proračunima Čebiševljeva ekstrapolacija je inicijalizirana posle tri slobodne, neubrzane iteracije, a ponovna inicijalizacija je vršena kada relativna razlika izmedju vrednosti koeficijenata d koji odgovara tekućoj iteraciji i vrednosti koeficijenta koji se koristi u formuli (4) postane veća od 1%. Treba napomenuti da ovo nije optimalna vrednost jer se radi o problemima sa sporom konvergencijom, pa ovaj kriterijum može biti znatno stroziji.

U Tabeli 1. uporedjen je broj iteracija u proračunima sa i bez ubrzanja na primeru jednodimenzionih problema različitih dimenzija istog materijalnog sastava. Korišćen je dvostruki kriterijum za zavrsetak iteracija: relativna greška za faktor umnožavanja manja je od $2x10^{-7}$ i kvadratna norma relativne greške u ukupnoj snazi manja od 10^{-6}. Povecanje geometrijskih dimenzija uzrokuje da je sistem neutronski slabije spregnut, što menja spektar sopstvenih vrednosti tako da se vrednost koeficijenta d priblizava jedinici, a to ima za posledicu sporiju konvergenciju. Prikazani su rezultati za različite stepene razvoja desne strane kvazi - jednodimenzione jednačine u red Ležandrovih polinoma, I. Iz tabele se vidi da se broj iteracija povećava sa porastom dimenzije sistema, dok efikasnost ubrzanja raste.

U Tabeli 2. prikazani su rezultati proračuna dvodimenzionog IAEA problema [5] za različite prostorne mreže (dimenzije čvora) i razlicite stepene aproksimacije (L,I). L je red razvoja rešenja, a I red razvoja desne strane kvazi - jednodimenzionih jednačina. I ovde je kriterijum zavrsetka spoljašnjih iteracija dvostruk: relativna greška za k_{eff} manja je od 10^{-6} i kvadratna norma relativne greske ukupne snage manja je od 10^{-6}. Unutrašnje iteracije se zavrsavaju kada je kvadratna norma relativne greške u raspodeli fluksa manja od 10^{-6}. U svim proračunima faktor ubrzanja spoljašnjih iteracija je približno jednak 5, što je neznatno manje nego kod odgovarajuceg jednodimenzionalnog problema. To ukazuje da je faktor ubrzanja viših momenata relativno malo razlicit od faktora ubrzanja osnovnog momenta. Vrednosti faktora multiplikacije pri neubrzanom i ubrzanom proračunu identične su na šest decimalnih mesta.

4. ZAKLJUČAK

Iz prikazanih rezultata proračuna se vidi da Čebiševljeva ekstrapolaciona metoda znatno povećava efikasnost nodalnog difuzionog proračuna. Rezultati se mogu još više unaprediti, pošto ovde nije vršena optimizacija postupka ubrzanja u smislu reinicijalizacije parametara. Iz jednačine (3) se vidi da su zahtevi za memorijom računara povećani u odnosu na proračun bez ubrzanja. Potrebno je čuvati u memoriji vrednosti svih koeficijenata, zavisno od reda aproksimacije koja se koristi, iz dve prethodne spoljašnje iteracije, što može biti nedostatak kod malih računara. Iako ovaj metod skraćuje vreme proračuna na račun povećanja dimenzija programa, njegova primena je nužna u slucaju proračuna reaktora velikih dimenzija kao što su energetski vodom hladjeni reaktori.

ZAHVALNOST

Zahvaljujemo se Dimitru Altiparmakovu koji je inicirao ideju da se napiše ovaj rad.

LITERATURA

[1] Dj. Tomašević, D. Altiparmakov, "Varijaciona nodalna difuziona metoda visoke tačnosti", Ova Konferencija

[2] Dj. Tomašević, D. Altiparmakov, "Variational Formulation of Higher Order Nodal Diffusion Method", Prihvaćeno za ANS Annual Meeting, San Diego, Jun 1988.

[3] E. Lewis, W. F. Miller, **Computational Methods of Neutron Transport**, John Willey & Sons, 1984.

[4] S. G. V. Manon, D. C. Khandekar, M. S. Trasi, "Iterative Solution of Finite Difference Diffusion Equation", B. A. R. C. 1129, Bombay 1981

[5] "Argonne Code Center: Benchmark Problem Book", ANL - 7416 Suppl. 2, ANL 1977.

TABELA 1. Uporedjenje brzine konvergencije na sistemima različitih dimenzija u slučaju jednodimenzionalnog proračuna.

I	Dimenzija sistema (cm)								
	85			170			340		
	No	N	No/N	No	N	No/N	No	N	No/N
1	95	34	2.79	441	80	5.51	549	99	5.55
2	105	33	3.18	555	96	5.78	495	67	7.39
3	105	35	3.00	552	103	5.36	487	68	7.16

No = Broj iteracija bez ubrzaja
N = Broj iteracija sa ubrzanjem

TABELA 2. Uporedjenje parametara proračuna dvodimenzionog IAEA problema.

Mreza	Aproks. (L.I)	Broj iteracija No	N	k_{eff}	Faktor ubrzanja
9 x 9	(1,3)	320	69	1.029987	4.64
	(1,5)	325	63	1.030038	5.16
	(2,3)	384	79	1.029537	4.86
	(2,5)	384	74	1.029589	5.19
	(3,3)	385	73	1.029521	5.27
	(3,5)	384	80	1.029579	4.80
17 x 17	(2,3)	354	79	1.029580	4.48
	(3,5)	353	75	1.029586	4.71

Referentna vrednost k_{eff} = 1.029585, [5].