

B. Zafirović, V. Radosavljević
 TELEVIZIJA BEOGRAD, Razvojna laboratorija
 Beograd, Kneza Višeslava 88
 M. Burazer
 GEOFIZIČKI INSTITUT OOUR Rudna fizika
 Jurija Gagarina 182, Novi Beograd

FILTRIRANJE SLIKE U HADAMAROVOM DOMENU

HADAMARD DOMAIN IMAGE FILTERING

SADRŽAJ: Osobine Hadamarove matrice omogućuju jednostavne postupke za brzu 2D - transformaciju slike. 2D - filtriranje kao sukcesivna obrada nad vrstama i kolonama matrice slike, za manje blokove ($N \leq 32$) je moguće izvesti brže u sekvencijskom, nego u frekvencijskom domenu. Rad diskutuje pogodnosti implementacije i sinteze 2D - filtra u Hadamarovom domenu.

ABSTRACT: Hadamard matrix features yield to the simple fast 2D - transformations algorithms. The 2D - filtering process as rows and columns successive processing for small blocks ($N \leq 32$), in sequency domain is possible done faster than in frequency domain. This article discuss Implementation and synthesis of 2D - filters in Hadamard domain.

1. UVOD

Postupci brze 2D - konvolucije se efikasno mogu izvršavati u transformacionom domenu množenjem transformisanih matrica. Stepenn efikasnosti zavisi od brzine algoritma za izračunavanje ortogonalne, unitarne transformacije. Najčešće se koriste algoritmi za brzu Furijerovu transformaciju (FFT). Za slučaj velikih matrica slike, primenjuje se blokovska obrada. U zavisnosti od veličine bloka korišćenje brze (Voiš) - Hadamarove transformacije (FHT) iziskuje kraće računarsko vreme. Da bi FFT zamenili sa FHT u procesu filtriranja slike moramo zameniti i pojmove frekvencijskog odziva filtra sa sekvencijskim odzivom. Za tumačenje postupka i sintezu filtra smo uzeli poredjenje filtriranja u Furijeovom i Hadamarovom domenu uz uslov da postupci za istu ulaznu sliku daju iste izlazne slike.

2. HADAMAROVA TRANSFORMACIJA, SEKVENCIJSKI SPEKTAR /1,2,3/

Hadamarova transformacija se definiše relacijom:

$$y = H \cdot x \dots (1)$$

Gde su $x = (x_1, \dots, x_N)$; $y = (y_1, \dots, y_N)$ ulazni vektor i izlazni transformisani vektor. H je Hadamarova matrica dimenzije $N \times N$; $h_{ij} = \pm 1$ ($i, j = 1, \dots, N$). H je unitarna, ortogonalna matrica ($H \cdot H^T = N \cdot J$). Neke Hadamarove matrice su simetrične ($H = H^T$). Tada je inverzna matrica $H^{-1} = (1/N) \cdot H$, a inverzna Hadamarova transformacija je data relacijom:

$$x = H^{-1} \cdot y = 1/N \cdot H \cdot y \dots (2)$$

Iz rel.2 vidimo da je FHT algoritam za direktnu i inverznu transformaciju isti uz skaliranje rezultata sa N. 2D - transformacija se dobija uzastopnom

primenom 1D - algoritma po vrstama a zatim po kolonama matrice slike. Analogno pojmu frekvencije u Furljeovom transformacionom domenu, u Hadamarovom se uvodi pojam sekvencije. Sekvencija se definiše kao broj tranzicija izmedju +1 i -1 na datom intervalu. Kada se sekvencije urede po stepenu porasta, skup transformacionih koeficijenata se naziva sekvencijskim spektrom signala. Ispitivanjem tog spektra se vidi da su značajne komponente (energija) skoncentrisane u okolini osa, pri čemu je komponenta nulte sekvencije (jednosmerna komponenta) uvek izrazito visoka, a ostale vrednosti umerenije variraju zavisno od sadržaja slike. Korelacija izmedju elemenata u transformacionom domenu je znatno slabija. Odbacivanjem nebitnih komponenti, uz zanemarljivo izobličenje slike, smanjuje se broj koeficijenata transformisane matrice. Ova "prirodna" osobina transformacije je osnov za postupak kompresije slike, a i dodatno smanjenje računarskog vremena u postupku filtriranja.

3. 2D - FILTRIRANJE SLIKE /4,6,7/

2D - filtriranje u transformacionom domenu je uzastopno 1D - filtriranje po vrstama i kolonama matrice podataka $S(N \times N)$, sl.1

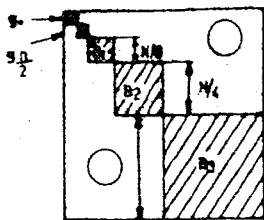
$$S_G = H^{-1} \cdot \langle G_V^H \cdot (H \cdot S \cdot H) \cdot G_K^H \rangle \cdot H^{-1} \dots (3)$$

gde su G_V^H i G_K^H Hadamarove filterske matrice $(N \times N)$ za vrste i kolone.

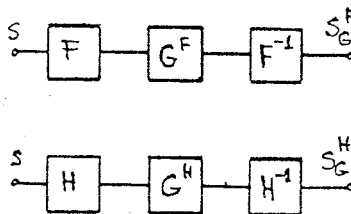


Sl.1 blok dijagram operacija 2D - filtriranja

U radu je pretpostavljeno da je 1D - filterske matrice imaju blok - dijagonalnu formu kao na slici 2. Do ovakve strukture se dolazi poredjenjem



sl.2 karakteristika $G_V^H = G_K^H$ sekvencijskog filtra, $N=16$



sl.3.

sekvencijskog spektra sa filtriranjem frekvencijskog spektra. Uslov je da su ulazni i izlazni podaci identični: $S_G^H = S_G^F$, kao na sl.3. Uslov identičnosti daje:

$$F^{-1} \cdot G^F \cdot F = H^{-1} \cdot G^H \cdot H \dots (5)$$

Rešavanjem po G^H se dobija:

$$G^H = (1/N) \cdot H \cdot F^{-1} \cdot G^F \cdot F \cdot H \quad \dots (6)$$

Da bi G^H moglo da se realizuje, matrica mora biti realna. Rešavanjem rel.6 dobijamo realnu matricu ako je zadovoljen uslov: $G^F = \text{dijag}(g_0, \dots, g_{N-1})$, pri čemu važi $g_i = g_{N-1-i}^*$, $i = 1, \dots, (N/2)-1$, i $g_0, g_{N/2}$ su realni brojevi. Matrica G^H tada ima blok - dijagonalnu formu kao na slici 2. Sad možemo oba postupka filtriranja (sl.3) uporediti po kriterijumu potrebnog broja računskih operacija. DFFT zahteva $N \cdot \text{ld}N$ kompleksnih sabiranja i $(N/2)\text{ld}N$ kompleksnih množenja. IFFT zahteva isti broj operacija. odnosno, potrebno je $2N\text{ld}N$ realnih sabiranja i $2N\text{ld}N$ realnih množenja za DFFT i isto toliko za IFFT. Ovome treba dodati još $2N$ realnih sabiranja i $4N$ realnih množenja za množenje sa kompleksno dijagonalnom G^F . Ukupni broj operacija za filtriranje u furijeovom domenu je $/5/$:

$$\text{sabiranje } A_F = 4N\text{ld}N + 2N \quad \dots (7)$$

$$\text{množenje } M_F = 4N\text{ld}N + 4N \quad \dots (8)$$

kod FHT nema množenja. DFHT i IFHT se realizuju sa po $\text{ld}N$ sabiranja - oduzimanja, tako da je ukupan broj operacija uključujući množenje sa blok - dijagonalnom matricom $G^H/5/$:

$$A_H = 2N\text{ld}N + (2+12+\dots+(N/8)(N/8-1)+(N/4)(N/4-1)+(N/2)(N/2-1)) \quad \dots (9)$$

$$M_H = (2^2+4^2+\dots+(N/8)^2+(N/4)^2+(N/2)^2)+2 \quad \dots (10)$$

Tabelarni pregled za različite vrednosti N daje rezultat koji sugeriše korišćenje Hadamarovog domena za filtriranje (ili brzu konvoluciju) za male blokove ($N \leq 32$).

N	A_F	M_F	A_H	M_H
4	40	48	16	6
8	112	128	62	32
16	288	320	198	86
32	704	768	630	342
64	1664	1792	2070	1366
128	3840	4096	7126	5462

primenom ovakvog postupka su dobijeni zadovoljavajući rezultati $/7/$. Za jednu od test slika rezultat je prikazan u dodatku. Filtrar koji je korišćen je separabilan, tako da se može posmatrati njegova aktivnost nezavisno duž xy koordinata. Generisan je pomoću rel.6 gde je za kompleksno dijagonalni filtar G^F ($N=16$) uzet nisko propusni Batervoedov filtar prvog reda sa koeficijentima $/5/$: $g = (1, 0.727-j0.445, 0.381-j0.486, 0.191-j0.393, 0.095-j0.294, 0.045-j0.207, 0.018-j0.132, 0.004-j0.064, 0.00)$

4. SINTEZA 2D-FILTRA U HADAMAROVOM DOMENU /4,6/

Predhodni pristup filtriranju je dao blok dijagonalnu formu filtra i brži postupak za manje blokove podataka. Dalje ubrzanje je moguće dijagonalizacijom matrice za 1D - filtriranje duž vrsta a potom i duž kolona (G_V^H, G_K^H).

Pretpostavimo da je slika oštećena nezavisnim, aditivnim šumom:

$$s_n^H(i,j) = s(i,j) + n(i,j) \quad \dots (11)$$

$$S_n^H = S_n \cdot H \quad \dots (12) \quad S_G^H = G_V^H \cdot S_n^H \cdot G_K^H \quad \dots (13)$$

Cilj filtriranja je da se otkloni šum uz minimalno (u smislu srednje kvadratne greške) oštećenje slike. U sekvencijskom domenu, srednja kvadratna greška je:

$$e^2 = E \left(\sum_i \sum_j (s_n^H(i,j) - s^H(i,j))^2 \right) \quad \dots (14)$$

Uslov je da oblik filtra bude dijagonalan i konstantan:

$$G_V^H = \text{dijag} (g^H(j,j)); \quad G_K^H = \text{dijag} (g^H(i,i)), i, j = 1, \dots, N; \quad N = 2^P \dots (15)$$

$$e^2 = E \left(\sum_i \sum_j (g^H(j,j) \cdot s_n^H(i,j) \cdot g^H(i,i) - s^H(i,j))^2 \right) \quad \dots (16)$$

Optimalne vrednosti za $g^H(i,i)$ i $g^H(j,j)$ se dobijaju minimizacijom rel.16:

$$\frac{\partial e^2}{\partial g^H(i,i)} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial e^2}{\partial g^H(j,j)} = 0 \quad \dots (17)$$

Rešenje je sistem jednačina:

$$g^H(j,j) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} E(S_n^H(i,j) \cdot S^H(i,j)) \cdot g^H(i,i)}{\sum_{i=0}^{N-1} E(S_n^H(i,j)^2) \cdot g^H(i,i)^2} \quad \dots (18)$$

$$g^H(i,i) = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} E(S_n^H(i,j) \cdot S^H(i,j)) \cdot g^H(j,j)}{\sum_{j=0}^{N-1} E(S_n^H(i,j)^2) \cdot g^H(j,j)^2} \quad \dots (19)$$

$E(S_n^H(i,j)^2)$; $E(S_n^H(i,j) \cdot S^H(i,j)) = E(S^H(i,j)^2)$ predstavljaju spektrarne gustine snage sekvencijskog spektra. One se mogu izračunati preko odgovarajućih spektarnih gustina snage frekvencijskog spektra. Rešavanjem sistema jednačina rel 18 i rel.19, dobijaju se koeficijenti sekvencijskog filtra koji je dijagonalan.

5. ZAKLJUČAK

Analize sekvencijskog domena i algoritma za brzu transformaciju /1,2,3,5,7/ su pokazale perspektivnost i neke prednosti 2D - filtriranja u sekvencijskom domenu. Svakako je potrebno proučavanje implementacije ovih algoritama u uređaju, jer takva iskustva vezana za kodovanje slike govore da su realizacije Hadamardove transformacije (pogotovu u realnom vremenu) dosta komplikovane. No i pored toga potrebno je još dodatnog rada na efikasnijim postupcima za sintezu 2D sekvencijskog filtra. Jedan od načina, sledeći radove /4,6/, vodi ka optimalnim filtrima dijagonalnog oblika. Za dobijanje tako jednostavnih oblika se postavljaju vrlo velika ograničenja uz određeno

oštećenje slike, tako da se sa njima pokriva vrlo uzana klasa 2D - frekvencijskih filtera. Uslov da komparativni 2D - frekvencijski filter bude dijagonalan u opštem slučaju ne daje dijagonalnu formu 2D sekvencijskog filtra. Potrebno je pronaći uslove i oblike 2D- frekvencijskih filtera koji daju ostvarljive (realne) dijagonalne (ili slično dijagonalne) 2D - sekvencijske filtre.

6.00DATAK

Za izvršenje postupka 2D sekvencijskog filtriranja napravljen je i proveren na primerima, program za FHT. Zatim je napravljen za implementaciju postupka prema rel.3 i odgovarajući programi za unošenje i prikazivanje podataka. Za filtarsku matricu su korišćena iskustva iz rada /5/. Oblik filtra je kao na slici 2, a blokovi u matrici su

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.29 \\ -0.29 & 1.0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.22 & 0.4 & -0.13 \\ -0.22 & 0.07 & 0.13 & -0.04 \\ -0.04 & 0.13 & 0.33 & 0.22 \\ -0.13 & 0.04 & -0.22 & 0.07 \end{pmatrix}$$

$$g_0 = 1.00 ; g_{N/2} = 0.00$$

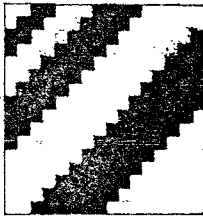
$$B_3 = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.12 & 0.22 & -0.07 & 0.33 & -0.11 & -0.20 & 0.06 \\ -0.12 & 0.04 & 0.07 & -0.02 & 0.11 & -0.04 & -0.06 & 0.02 \\ -0.22 & 0.07 & 0.23 & 0.25 & 0.20 & -0.06 & -0.12 & 0.04 \\ -0.07 & 0.02 & -0.25 & 0.08 & 0.06 & -0.02 & -0.04 & 0.01 \\ -0.33 & 0.11 & 0.20 & -0.06 & 0.62 & 0.12 & 0.22 & -0.07 \\ -0.11 & 0.04 & 0.06 & -0.02 & -0.12 & 0.04 & 0.07 & -0.02 \\ -0.20 & 0.06 & 0.12 & -0.04 & -0.22 & 0.27 & 0.23 & 0.25 \\ -0.06 & 0.02 & 0.04 & -0.01 & -0.07 & 0.02 & -0.25 & 0.08 \end{pmatrix}$$

Kao test slike su korišćene matrice (16x16) koje reprezentuju različite položaje ivica kao i više promena prostornih učestanosti. Na sl.4 je grafički prikazana jedna takva slika a na sl.5 rezultat filtriranja. Filter je bio niskopropusni, te se u gornjem levom uglu (sl.5) vidi da su visoke prostorne učestanosti filtrirane. Takođe se uočava efekat razmazivanja na ivicama. Na sl.6 je detaljnije prikazano dejstvo filtra na sliku, na proizvoljnom preseku slike. Uočava se fazni pomeraj koji unosi filter. Brojne vrednosti ovog i drugih primerase nalaze u radu /7/.

Zahvaljujemo se Dr. Tomislavu Tomiću doc. žb je omogućio realizaciju ovog rada.

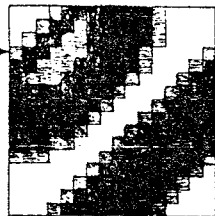
7. LITERATURA

1. W.K.PRATT "DIGITAL IMAGE PROCESSING" WILEY - 1978
2. C.K.P CARKE "HADAMARD TRANSFORMATION: WALSH SPECTRAL ANALYSIS OF TELEVISION SIGNALS" BBC Res.rep.1975.
3. H.TCHEN, R.MOTSCH "CODAGE DES SIGNAUX DE TELEVISION PAR TRANSFORMATIONS ORTHOGONALES DE HADAMARD ET DE HAAR" ACTA ELECTRONICA 19,3,1976
4. K. RUMATOWSKI "DESIGN OF TWO - DIMENSIONAL NONRECURSIVE FILTERS USING WALSH TRANSFORM" in SIGNAL PROCESSING II: THEORIES AND APPLICATIONS ELSEVIER - 1983
5. C. ZAROWSKI, M.YUNIK "SPECTRAL FILTERING USING THE FAST WALSH TRANSFORM" IEEE TRANS VOLASSP- 33, No5, 1985
6. K.RUMATOVSKI "SYNTHESIS OF TWO-DIMENSIONAL DIGITAL SEQUENCY DOMAIN FILTERS" Ing. DIGITAL SIGNAL PROCESSING - 84, ELSEVIER - 1984.
7. B. ZAFIROVIĆ "FILTRIRANJE DVODIMENZIONIH SLIKA U HADAMAROVOM DOMENU" Diplomski rad ETF Beograd, 1987.



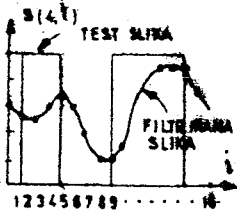
SL.4. TEST SLIKA
CRNO = 0.0
BELO = 1.0

PRESEK



SL.5 FILTRIRANA SLIKA

CRNO = $0.0 \div 0.2$
 TAMNO = $0.3 \div 0.5$
 SVETLIJE = $0.6 \div 0.7$
 BELO = $0.8 \div 1.0$



PRESEK TEST SLINE
 I FILTRIRANE SLINE
 ZA $j=4$
 SL.6