

Žarko STANKOVSKI, Igor ZMIJAREVIĆ\*

DENT-SERMA, CEN Saclay,  
91191 Gif sur Yvette Cedex - France

\* u odsustvu iz Instituta Boris Kidrič, Beograd

**POVEĆANJE EFIKASNOSTI VIŠEGRUPNOG DVODIMENZIONALNOG TRANSPORTNOG  
PRORAČUNA PRIMENOM IZOTROPNE REFLEKSIJE I ENERGETSKI ZAVISNE  
PROSTORNE MREŽE**

**IMPROVEMENT OF THE EFFICIENCY OF TWO-DIMENSIONAL MULTIGROUP  
TRANSPORT CALCULATIONS ASSUMING ISOTROPIC REFLECTION WITH  
MULTILEVEL SPATIAL DISCRETISATION**

**SADRŽAJ** - U radu su opisane dve aproksimacije koje se koriste prilikom dvodimenzionalnih visegrupnih proračuna veoma heterogenih sredina velikih dimenzija programom APOLLO 2: izotropna refleksija i energetska zavisna prostorna mreža. Prikazani su rezultati proračuna koji potvrđuju efikasnost ovih aproksimacija pri čemu se ostvaruje znatna ušteda u vremenu i memoriji računara, uz minimalni gubitak preciznosti.

**ABSTRACT** - This paper presents two approximations used in multigroup twodimensional transport calculations in large, very homogeneous media: isotropic reflection together with recently proposed group-dependent spatial representations. These approximations are implemented as standard options in APOLLO 2 assembly transport code. Presented example calculations show that significant savings in computational costs are obtained while preserving the overall accuracy.

**I. UVOD**

Zbog jake sprege medju gorivnim elementima savremenih reaktora neutronska fizicki proračun jezgra počinje dvodimenzionalnim proračunima pojedinih ansambila gorivnih elemenata (uključujući kontrolne i merne elemente kao i ostale structure). Uobičajeni postupak je energetska i prostorna diskretizacija integralne transportne jednačine, koja uslovljava broj nepoznatih struja i flukseva koji se računaju za svaku energetsku grupu. Da bi se dobili rezultati zadovoljavajuće tačnosti, diskretizacija po energijama treba da sadrži veliki broj grupa (reda 100), a u prostoru, zbog jake heterogenosti sredine, veliki broj regiona (često preko 100). Ovako veliki broj nepoznatih zahteva znatnu memoriju računara i relativno dugo vreme proračuna.

Uobičajeni način rešavanja koristi iterativni postupak, pri čemu se u svakoj grupi određuje fluks u zavisnosti od izvora (fisija i rasejanje iz ostalih grupa). U standardnim transportnim kodovima prostorna aproksimacija, koja određuje broj nepoznatih, je identična za svaku grupu. S obzirom na mnogo veću transparentnost sredine u visokim energetske grupama, a usled ortogonalnosti energetskog i prostornog operatora, moguće je znatno smanjiti broj nepoznatih pogodnijom diskretizacijom u ovim grupama.

Još jedna mogućnost znatne uštede u vremenu je aproksimacija izotropne refleksije. Verovatnoće sudara u dvodimenzionalnim sredinama izračunavaju se numeričkom integracijom po trajektorijama neutrona od nastanka do atenuacije, koja može biti znatno veća od linearnih dimenzija ansambla. U aproksimaciji izotropne refleksije smatra se da se na granichnoj površini neutroni rasejavaju uniformno i izotropno, pa se integrisanje reducira po trajektorijama od nastanka do granice.

Obe aproksimacije implantirane su u višegrupni transportni program APOLLO 2 (ref. 1), koji se piše u Commissariat à l'Energie Atomique i trenutno je u fazi probne eksploatacije.

## II. METODA GRANIČNIH STRUJA

Jednogrupsna transportna jednačina, u sredini sa izotropnim rasejanjem i izvorima, u opštem slučaju može se rešiti metodom graničnih struja. Heterogeni, višedimenzionalni konveksni domen  $D$  sa zadatom raspodelom unutrašnjih izvora i opštim graničnim uslovima, podeljen je na skup konveksnih subdomena  $\{D_i\}$ . U svakom  $D_i$  klasičnom metodom verovatnoća sudara izračunavaju se unutrašnji fluksevi i izlazni ugaoni fluksevi, u zavisnosti od unutrašnjih izvora i ulaznih ugaonih flukseva. Interakcije subdomena, granični uslovi i kontinuitet na graničnim površinama, definisane su sistemom jednačina koji omogućava iterativno izračunavanje flukseva u svim subdomenima (ref 2 i 3).

Svaki subdomen  $D_i$  podeljen je na homogene regione  $\{D_{i\alpha}\}$ , zapremine  $V_{i\alpha}$  (sa konstantnim izvorima i efikasnim preseccima), a njegova granica na parcijalne površine  $\{\partial D_{i\alpha}\}$ , tako da se unutrašnji i granični fluksevi mogu razviti po skupu linearno nezavisnih funkcija  $\varphi_i^k$  i  $\psi_\alpha^p$ :

$$\phi(\mathbf{r}) \sim \sum_{i,k} \Phi_i^k \varphi_i^k(\mathbf{r}), \quad \psi_\pm(\mathbf{x}) \sim \sum_{\alpha,p} J_{\pm,\alpha}^p \psi_\alpha^p(\mathbf{x}) \quad (1)$$

gde je  $\mathbf{x}=(\mathbf{r},\Omega)$ . Funkcije  $\varphi_i^k = \varphi_i^k$  definisane su u oblastima  $D_i$ , a  $\psi_\alpha^p = \psi_\alpha^p$  u  $\partial D_i \times 2\pi_\pm$ .

Funkcije  $\varphi_i^k$  i  $\psi_\alpha^p$  su ortogonalne. Zbog jednoštavnosti usvojena je normalizacija:

$$\int_D \varphi_i^k \varphi_j^l d\mathbf{r} = V_i \delta_{ij}^k, \quad \int_{\partial D_i} \psi_\alpha^p \psi_\beta^q |\Omega \cdot \mathbf{n}| d\mathbf{x}_\pm = \delta_{\alpha\beta}^p / (\pi S_\alpha),$$

gde  $S_\alpha$  označava površinu  $\partial D_{i\alpha}$ . Izborom  $\varphi_i^0(\mathbf{r})=1$  i  $\psi_\alpha^0(\mathbf{x})=1$ , onda  $\Phi_i^0(\mathbf{r})$  i  $J_\alpha^0$  postaju srednje vrednosti, respektivno, fluksa u  $D_i$  i struje kroz  $\partial D_{i\alpha}$ .

Jednačine za flukseve i struje, u svakom subdomenu, dobijaju se iz klasične metode verovatnoća sudara (ref. 4) i u matricnoj notaciji glase:

$$V \Phi = P \cdot P + P_{VS} J_- \quad (2)$$

$$J_+ = P_{SV} P + P_{SS} J_- \quad (3)$$

$$J_- = A J_+ \quad (4)$$

gde je  $V$  dijagonalna matrica zapremina  $V_i$ , a  $F = \Sigma \Phi + S$  gustina emisije ( $\Sigma$  je matrica efektivnih preseka, a  $S$  vektor izvora). Jednačine (2) i (3) su lokalne za svaki subdomen, dok je jed. (4) globalna i obezbeđuje kontinuitet izlaznih i ulaznih struja svih parcijalnih graničnih površina.

Koeficijenti matrica verovatnoća sudara  $P$ ,  $P_{VS}$ ,  $P_{SV}$ ,  $P_{SS}$  i geometrijske matrice  $A$  dati su izrazima:

$$P_{ij} = \int_{D_i \times D_j} \varphi_i(r) \varphi_j(r') k(r' \rightarrow r) dr dr' ,$$

$$P_{i\alpha} = (4/S_\alpha) P_{\alpha i} = 4\pi \int_{D_i \times \partial D_i} \varphi_i(r) \psi_\alpha(r', \Omega_s) k(r' \rightarrow r) |\Omega_s \cdot n'| dr ds' ,$$

$$P_{\alpha\beta} = 4 \pi^2 S_\alpha \int_{\partial D_i \times \partial D_i} \psi_\alpha(r, -\Omega_s) \psi_\beta(r', \Omega_s) k(r' \rightarrow r) |\Omega_s \cdot n| |\Omega_s \cdot n'| ds ds' ,$$

$$A_{\alpha\beta} = \pi S_\alpha \int_{\partial D_i} \psi_\alpha(r, \Omega) \psi_\beta(r, -\Omega) \beta(r) |\Omega \cdot n| dr d\Omega ,$$

gde index  $i$  označava sumiranje po celom subdomenu.  $k(r' \rightarrow r) = \exp(-\tau)/(4\pi s^2)$  je uobičajeni transportni kernel, gde je  $\tau$  optičko rastojanje između tačaka  $r$  i  $r'$ .  $\beta(r)$  je albedo ili faktor transmisije.

Ovi koeficijenti zadovoljavaju sledeće jednačine reciprociteta i održanja broja neutrona:

$$\begin{cases} P = P^t , \\ P_{VS} S = 4 P_{SV}^t , \\ P_{SS} S = (P_{SS} S)^t , \\ A S = (A S)^t . \end{cases} \quad \begin{cases} V = \Sigma P + 1 P_{SV} , \\ 1 = \Sigma P_{VS} + 1 P_{SS} , \\ P = 1 A . \end{cases}$$

Ovde indeks  $t$  označava transponovanu matricu,  $S$  je diagonalna matrica sa elementima  $S_\alpha$ , a  $V$ ,  $\Sigma$ ,  $1$  i  $P$  su vektori sa elementima  $V_i \delta_{k0}$ ,  $\Sigma_i \delta_{k0}$ ,  $\delta_{\rho 0}$  i  $P_\alpha \delta_{\rho 0}$ , gde je

$$P_\alpha = \frac{1}{S_\alpha} \int_{\partial D_\alpha} \beta(r) ds$$

frakcija površine  $\alpha$  koja je granična sa ostalim subdomenima.

Efikasnost izračunavanja dvodimenzionalnih ansambala uslovljena je vremenom i neophodnom memorijom za izračunavanje verovatnoća sudara, jednačina 5, i rešavanja sistema jednačina 2 - 4.

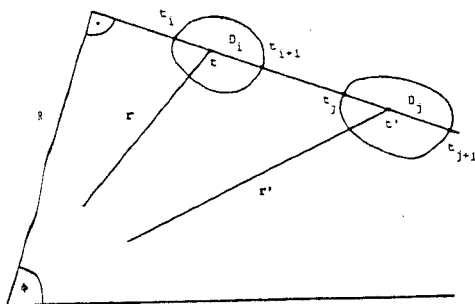
## A. Izračunavanje verovatnoća sudara

Verovatnoće sudara se najpogodnije izračunavaju ukoliko se integracija vrši duž trajektorija neutrona u ravni xy. Smenom promenljivih (ref. 5),  $r$  i  $r'$  u  $(R, \phi, t, t')$  kao na Slici 1. prelazi se na "prirodne koordinate" i izraz za verovatnoće sudara piše se:

$$P_{ij}^{kl} = \frac{C_i^k C_j^l}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dR \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi_i(t) dt \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi_j(t') K_{i1}(\tau) dt'$$

Integrali po  $t$  i  $t'$  su analitički i svode se na linearnu kombinaciju Bickley-Naylor-ovih funkcija  $K_{i1}$ ;  $K_{i2}$  u aproksimaciji ravnog fluksa, ili  $K_{i3}$ ,  $K_{i4}$  i  $K_{i5}$  u aproksimaciji linearnog fluksa<sup>2</sup> = 3 člana u razvoju iz jednačina (1).

Numeričko integriranje po  $\phi$  i  $R$  vrši se formulom trapeza: po  $R$  trasiranjem snopa ekvidistantnih integracionih linija (trajektorija neutrona), sa korakom  $\Delta R$ , koje pokrivaju celu oblast integrisanja, a po  $\phi$  rotacijom ove mreže, korakom  $\Delta\phi$ . Po svakoj liniji određuju se odsečki putanja kroz regione, pa se verovatnoće sudara izračunavaju simultano za sve traversirane regione, čime se ista mreža koristi za sve  $P_{ij}$ . Obim računa zavisi od broja integracionih linija i od broja verovatnoća sudara koja se izračunavaju po svakoj liniji.



Slika 1

Za određeni  $\Delta\phi$  i  $\Delta R$  broj integracionih linija zavisi od simetrija sistema i stepena heterogenosti, a njihova dužina od graničnih uslova. Pored toga, što je ansambl heterogeniji neophodno ga je podeliti na veći broj manjih regiona, što uslovljava veći broj linija (manji  $\Delta R$  i  $\Delta\phi$ , zbog preciznosti integrala) i veći broj traversiranih regiona. U ansamblima okruženim vakuumom, integracione linije zaustavljaju se na granicama, pa se verovatnoće sudara računaju između svakog traversiranog regiona i svih ostalih, u samom ansamblu. U ansamblima koji se ponavljaju do beskonačnosti (granični uslovi refleksije ili translacije) integracione linije produžavaju se van ansambla, pa se verovatnoće sudara računaju između svakog regiona iz osnovnog ansambla i sve ostale, koji se nalaze na optičkim rastojanjima manjim od jednog određenog  $\tau_{\max}$  za koje se može pretpostaviti da Bickley-ewe funkcije postaju zanemarljivo male.

Korišćenjem iste integracione mreže, verovatnoće sudara se računaju u svim energetskim grupama. Vidi se da u beskonačnim ansamblima, sa većim brojem regiona i malim efikasnim preseccima, vreme računanja može biti veoma dugačko.

### B. Izotropna refleksija

U jednačinama 2 i 3 matrice verovatnoća sudara imaju blok strukturu pa se sistem može rešiti iterativnim postupkom. U svakoj iteraciji, za svaki subdomen, iz poznatih unutrašnjih izvora i ulaznih struja izračunavaju se fluksevi, jed. 2 i izlazne struje, jed. 3, pa se zatim iz jed. 4 dobijaju ulazne struje u susedne subdomene. Postupak se ponavlja sve dok se ne dostigne zadovoljavajuća tačnost.

Sistem 2-4 se može rešiti i direktnom metodom. Eliminacijom struja  $J_{-}$  i  $J_{+}$  dobija se globalni sistem:

$$v\phi = \bar{P} \bar{F}$$

gde je

$$\bar{P} = P + P_{VS} A (1 - P_{SS} A)^{-1} P_{SV} \quad (6)$$

Za upoređivanje efikasnosti oba postupka bitni kriterijumi su potrebna memorija za matrice  $P$  i  $\bar{P}$  i vreme potrebno za njihovu inverziju. Pretpostavlja se da je broj regiona uvek znatno veći od broja graničnih površina, pa su dimenzije matrica  $P_{SV}$ ,  $P_{SS}$  i  $P_{VS}$  male, a i vreme izračunavanja  $\bar{P}$  u jednačinama 6 zanemarljivo.

Ukoliko je domen  $D$  podeljen na  $M$  subdomena sa po  $N_m$  regiona, broj elemenata matrica koje se čuvaju u memoriji je u slučaju iterativnog i direktnog postupka je:

$$N_I = \sum_{m=1}^M (N_m)^2, \quad N_D = \left( \sum_{m=1}^M N_m \right)^2,$$

tako da je uvek  $N_I < N_D$ .

Sto se tiče vremena računanja, ono je uvek kraće u slučaju iterativnog postupka kada je broj regiona veliki, a za mali broj regiona problem vremena je nebitan. Direktni postupak omogućava uvođenje graničnog uslova izotropne refleksije, naime u slučaju jednog jedinog subdomena izraz (6) postaje:

$$\bar{P} = P + P_{VS} (1 - P_{SS})^{-1} P_{SV}$$

Primenom ovog formalizma znatno se skraćuje vreme računanja u beskonačnoj sredini, jer je izračunavanje verovatnoća sudara vrši na isti način kao za ansambl okružen vakuumom. Ova predpostavka, da se neutroni reflektiraju izotropno, opravdana je uvek kada je gradient fluksa u graničnim regionima mali, čime se uz male gubitke preciznosti znatno dobija na vremenu.

### C. Energetski zavisna prostorna diskretizacija

Da bi se dobila zadovoljavajuća tačnost proračuna, prostorni domen se deli na odredjeni broj regiona u kojima se smatra da je varijacija fluksa u određenoj grupi mala. Broj regiona (čija optička dimenzija obično reda srednje dužine slobodnog puta neutrona) određuje broj nepoznatih vrednosti fluksa i struja, kao i elemenata matrice verovatnoća sudara koje treba izračunati za svaku grupu. Standardni transportni programi koriste identičnu prostornu diskretizaciju za svaku energetsku grupu pri čemu je veličina regiona određena vrednostima efikasnih preseka i gradijenata fluksa u grupi u kojoj su one najveće (obično u termičkim grupama a naročito za jake absorbere u kontrolnim elementima). Ovakav pristup nije neophodan pošto relacija medju grupama u prostorno-energetski diskretizovanoj transportnoj jednačini ne zavisi od prostorne promenjlive, te se u principu prostorna diskretizacija može izvršiti za svaku grupu posebno.

Postupak koji se jednostavno može ugraditi u standardni program sastoji se u sledećem: Energetski domen deli se u skup od  $M$  makrogrupa  $\{G_g, g=1, M_g\}$  pri čemu svakoj makrogrupi odgovara podela na regione  $\{D_i^G, i=1, N_g\}$ . Razlika izmedju ovakvog i standardnog proračuna ispoljava se jedino u izračunavanju prostorne raspodele izvora iz fisije i rasejanja u zadatoj energetskoj grupi  $g \in G$ , koja se u slučaju aproksimacije ravnog fluksa može izraziti kao

$$S_i^g = \sum_{G' \leq G} \sum_{j \in D^{G'}} v_{ij}/v_i \sum_{g' \in G'} \Sigma_j^{g' \rightarrow g} \phi_j^{g'} , i=1, \dots, N_G ,$$

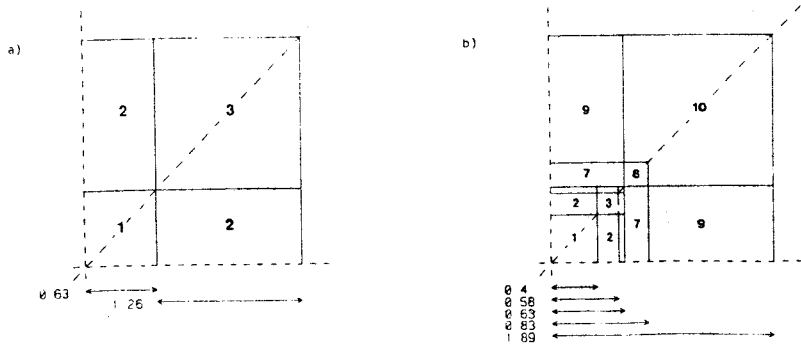
gde  $\Sigma_j^{g' \rightarrow g} \phi_j^{g'}$  označava ukupni doprinos izvoru iz rasejanja i fisije, a  $v_{ij}$  predstavlja zajedničku zapreminu koju zauzimaju regioni i i j. U realnim proračunima regioni se biraju tako da se na osnovu prostorne diskretizacije u višoj makrogrupi G podelom na subregione dobija diskretna mreža za nižu makrogrupu G+1. U ovom slučaju je za  $G' \leq G$ ,  $v_{ij}/v_i = 1$ , a za  $G' > G$   $v_{ij}/v_i = v_j/v_i$ .

Energetski zavisna diskretizacija ima višestruke prednosti u pogledu efikasnosti proračuna. Smanjuje se broj elemenata matrice verovatnoća sudara koje treba izračunati kao i veličina sistema jednačina koji se rešava. Ova prednost dolazi do posebnog izražaja u slučaju dvodimenzionalnog proračuna gde vreme potrebno za izračunavanje matrice sudara predstavlja vrlo veliki udeo u ukupnom vremenu računanja. Smanjenje broja regiona u grupama gde gusta mreža nije potrebna omogućava pogodniji izbor integracionih linija od čijeg broja, obim proračuna zavisi najviše.

### III. REZULTATI

Efikasnost aproksimacija prikazana je na jednom primeru proračuna APOLLO 2, izvršenim na računaru CRAY XMP, gde su korišćeni izotopski podaci iz biblioteke efikasnih preseka u 99 energetskih grupa.

Na slici 2. prikazan je jedan motiv rešetke lakovodnog reaktora, sa homogeniziranim ćelijama. Izvršena su tri proračuna i rezultati su prikazani u Tabeli 1. U prva dva proračuna korišćeni su prostorne mreže sa slika 2.a i 2.b, respektivno. U trećem proračunu, u brzom domenu (52 grupa) upotrebljena je mreža sa slike 2.a, a u termičkom (47 grupa) mreža sa slike 2b.



Slika 2. a) mreža sa 3 regiona, b) mreža sa 10 regiona

Rezultati iz Tabele 1 pokazuju da dobra preciznost za  $k_{eff}$  zahteva korišćenje fine mreže u termičkim grupama, gde je gradijent fluksa značajan. Poređenje rezultata, dobivenih finom i mešovitom mrežom, pokazuje značaj primena energetske zavise prostorne mreže: ovaj proračun dao je istu tačnost uz znatno kraće vreme računanja.

Tabela 1

Mreža	$k_{eff}$	$t^*$ (sec)	$t^{**}$ coll (sec)
Gruba	0.98403	4.32	2.22
Fina	0.98869	16.20	13.15
Mešovita	0.98868	8.65	5.87

\* Ukupno vreme računanja

\*\* Vreme za računanje  $P_{ij}$

#### IV. Zaključak

Prikazane aproksimacije omogućavaju znatne uštede u vremenu proračuna i zahtevima za memoriju računara u višegrupnim izračunavanjima gorivnih ansambala lakovodnih nuklearnih reaktora. Naročito su efikasne produkcionim proračunima, kao i u ostalim slučajevima kada je gradijent fluksa mali u blizini granične površine.

Zahvaljujemo se R. Sanchezu i J. Mondotu kao i svim saradnicima na projektu APOLLO 2, koji su svojim doprinosom omogućili da se napiše ovaj rad.

#### Literatura

1. R. SANCHEZ, J. MONDOT, Z. STANKOVSKI, A. COSSIC and I. ZMIJAREVIC, "A User-Oriented, Portable, Modular Code for Multigroup Transport Calculations," Proc. Topl. Mtg. Advances in Reactor Computations, Paris April 27-30, 1987, ANS (1987)
2. A. KAVENOKY and Z. STANKOVSKI, "A Substructure Method for Multidimensional Integral Transport Calculations" Proc. Topl. Mtg. Advances in Reactor Computations, Salt Lake City, Utah April 28-31, 1983, Vol. I, p.178, ANS (1983)
3. Z. STANKOVSKI, *Nucl. Sci. Eng.*, **92**, 255 (1986).
4. R. SANCHEZ and N. J. McCORMICK, *Nucl. Sci. Eng.*, **80**, 481 (1982).
5. Z. STANKOVSKI, Dvodimenzionalno tretiranje transporta neutrona u heterogenoj sredini Galerkinovom metodom, Magistarski rad, Beograd (1978)
6. R. SANCHEZ and J. MONDOT, "Multilevel Transport Calculations," CNS/ANS International Conference on Simulation Methods in Nuclear Engineering, Montreal, October 14-16 (1986).

