

Vlasta Zanchi
 Jadranka Marasović
 Mojmil Cević

Fakultet elektrotehnike,
 strojarstva i brodogradnje
 Split
 R.Boškovića bb

OPTIMALNO UPRAVLJANJE U MINIMALNOM VREMENU

TIME OPTIMAL CONTROL

Sadržaj - U radu je analizirano vremenski optimalno upravljanje linearnim sistemom drugog reda. Uz kratak opis metode dan je prijedlog za realizaciju. Poseban naglasak dan je suboptimalnim sistemima, za koje je izvršena i analiza pogreške. Analiza i simulacija izvršena je na personalnom računalu.

Abstract - The paper analysis the time optimal control of the second order system. The short review of the method is given together with the suggestion for the technical realization. A special accent is given to the suboptimal systems and the error analysis is given. Analysis and simulation have been performed by means of a personal computer.

1. UVOD

Matematski opis linearnog vremenski invarijantnog sistema dan je općenito:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \vec{x}(t) + B \vec{u}(t) \quad 1.1$$

gdje je: $\vec{x}(t)$ - vektor stanja, A - matrica koeficijenata, B - vezna matrica i D - prijenosna matrica ⁽¹⁾.

Pretpostavimo li da je sistem potpuno upravljiv ⁽²⁾ i da su sve komponente upravljačkog vektora $u(t)$ ograničene:

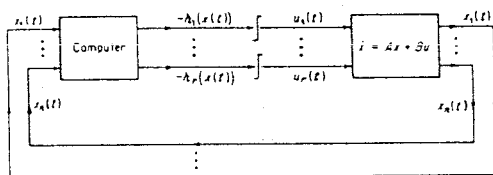
$$|u_j(t)| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, r \quad 1.2$$

i da je početno stanje u $t=0$ zadano općenito:

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

1.3

Zadatak optimalne regulacije u minimalnom vremenu je sinteza kontrolnog vektora $\vec{u}(t)$ koji prevodi sistem (1.1) iz početnog stanja \vec{x}_0 do ishodišta, u minimalnom vremenu. Blok prikaz vremenski optimalnog sistema s povratnom vezom dan je na slici 1. (3)



Sl.1. Blok prikaz realizacije vremenski optimalnog sistema izvedenog s povratnom vezom

Iz blok prikaza danog na slici 1 vidimo da upravljački vektor poprima iznose $\{+1, -1\}$ naizmjenice ovisno o predznaku pripadne preklapne krivulje $h_j |\vec{x}(t)|$. Oblik upravljačkog vektora dan u vidu sekvence maksimalnog dozvoljenog iznosa tog vektora, proizlazi iz principa maksimuma koji je razvio poznati matematičar Pontrjagin.⁽³⁾ Napomenimo još da upravljački vektor u obliku preklapne sekvence dobijemo za klasu tzv. "normalnih" sistema⁽³⁾.

U ovom radu ograničit ćemo se na analizu sistema drugog reda s jednim ulazom, gdje će glavni zadatak biti utvrđivanje analitičkog oblika preklapne krivulje.

2. VREMENSKI OPTIMALNA REGULACIJA SISTEMA II. REDA

Kao što smo vidjeli u uvodnom poglavlju upravljačku veličinu $u(t) = \{u^+, u^-, u^+, \dots\}$ generira sklop s idealnom relejnom karakteristikom. Ovisno o iznosu vektora stanja sistema, relej se nalazi u pozitivnom ili negativnom stanju. Nadjemo li skup rješenja u faznoj ravnini za $u=+1$ i $u=-1$ sistem će se kretati po onoj faznoj trajektoriji na kojoj se našao u zadanom početnom trenutku. Spomenuta fazna trajektorija odgovara uzbuđi ± 1 . Kretanjem, sistem dolazi na preklapnu krivulju, mijenja se predznak uzbuđne veličine i sistem

se kreće dalje prema ishodištu. Na ilustracijama pojedinih slučajeva vidimo da preklopna krivulja predstavlja segmente faznih trajektorija putem kojih je jedino moguće doći u ishodište.

Općenito su analizirana tri slučaja:

$$\ddot{y} = k u(t) \quad 1.4$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = k u(t) \quad 1.5$$

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \omega^2) y = k u(t) \quad 1.6$$

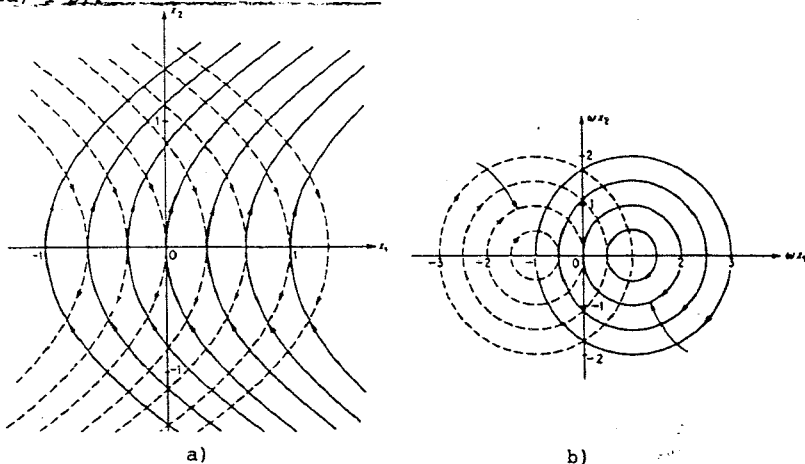
ili u vektor matričnoj formi isti sistemi dani su općenito

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad 1.7$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad 1.8$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad 1.9$$

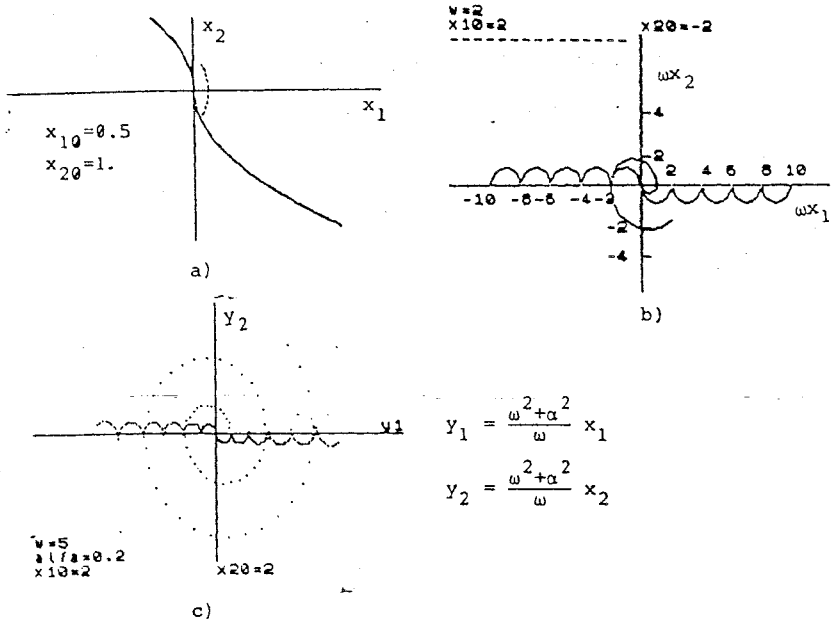
Grafički prikaz rješenja sistema (1.7) i (1.8) dan je na slici 2a) i b).



Sl.2. a) Fazne trajektorije sistema $\ddot{y} = k u(t)$ i
b) $\ddot{y} + \omega^2 y = k u(t)$ za $u(t) = \underline{+1}$

Crtkano označene linije predstavljaju fazne trajektorije za $u=-1$, a puno označene linije za $u=+1$. Uvidom u fazne dijagrame vidljivo je da za bilo koje početno stanje postoji samo jedan put dolaženja u ishodište. Kretanje u zadnjoj sekvenci nužno se odvija po samoj preklapnoj krivulji.

Na slici 3a), b) i c) navedena su tri proizvoljna primjera za sisteme općenito zadane pod (1.7), (1.8) i (1.9). Iznosi parametara navedeni su uz grafove.



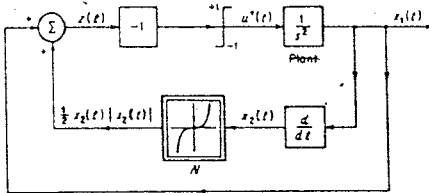
Slika 3. Grafički prikaz kretanja vremenski optimalnog sistema

3. SUBOPTIMALNA VREMENSKA REGULACIJA SISTEMA II. REDA

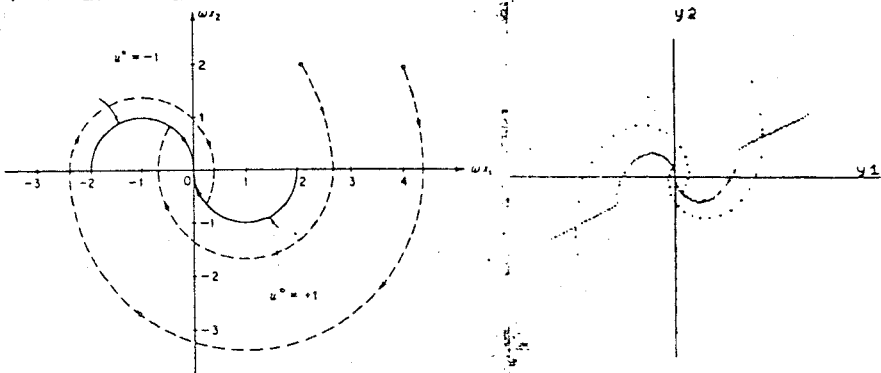
Analitički opis prijelomne krivulje, a isto tako i softverska podrška, postaje izrazito složena kako raste složenost sistema. Sklopovska realizacija vremenski optimalnog sistema II. reda danog izrazom (1.4) zbog ilustracije dana je na slici 4. U spomenutom slučaju preklapna krivulja ucrtana u dvostruko uokvirenom bloku relativno je jednostavna za izvedbu.

Već za slučaj (1.5) i (1.6) složenost prekladne krivulje otežava fizičku realizaciju odnosno u realizaciji pomoću računala složenija softverska podrška unosi kašnjenje. Iz spomenutih razloga predložene su aproksimacije preklopnih krivulja koje su za primjer (1.5) i (1.6) prikazane grafički na slici 5.

Greška u iznosu minimalnog vremena koja će nastupiti zamjenom idealne optimalne prekladne krivulje suboptimalnom pokazalo se

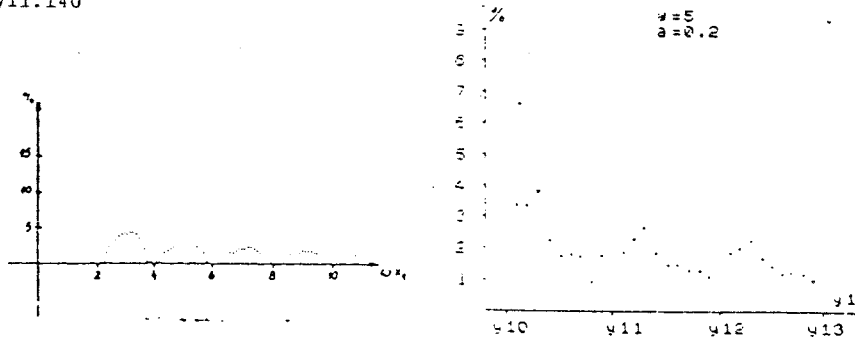


Sl.4. Tehnička realizacija vremenski optimalnog upravljanja sistema $y = k u(t)$



Sl.5. Grafički prikaz suboptimalnih prijeklopnih krivulja

analizom provedenom pomoću računala da u najnepovoljnijem slučaju iznosi 5% u oba primjera. Ovisno o početnom stanju vidimo da je pogreška to manja što smo dalje od ishodišta u početnom trenutku $t=0$. Grafički prikaz ovisnosti pogreške o udaljenosti dat je na grafovima na slici 6.a) i b).



Sl.6. Pogreška suboptimalne vremenske regulacije za primjer

$$\ddot{y} + \omega^2 y = k u(t) \quad \text{i} \quad \ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \omega^2)y = k u(t)$$

ZAKLJUČAK

Analiza je izvršena da se ukaže na jednostavnost realizacije upravljanja stanjima sistema II. reda u minimalnom vremenu. Složena teorija nalaženja ekstrema koristeći Pontrjaginov metod svedena je na jednostavni zadatak generiranja suboptimalne preklapne krivulje. Uz poznate, odnosno dostupne iznose stanja sistema preko suboptimalne preklapne krivulje slijedi optimalna sekvenca upravljačkog vektora na izlazu iz releja.

Literatura:

1. I.Husar: "Optimalni i adaptivni sistemi", Sveučilište u Zagrebu, Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1973.
2. M.Stojić: "Kontinualni sistemi automatskog upravljanja", Građevinska knjiga, Beograd 1973.
3. M.Athans, P.Falk: "Optimal Control", Mc Graw-Hill, N.Y. 1966.
4. V.Zanchi: "Optimizacija", Sveučilište u Splitu, FESB, Split, 1983.