

Aleksandar I. Zečević  
Elektrotehnički fakultet, Beograd

## ELEKTRIČNI MODEL ZA ELASTIČNO RASEJANJE TERMALNIH NEUTRONA AN ELECTRICAL MODEL FOR THE ELASTIC SCATTERING OF THERMAL NEUTRONS

**SADRŽAJ** - U ovom radu formiran je električni model pomoću kojeg se rešava Šredingerova jednačina koja opisuje elastično rasejanje termalnih neutrona. U fizici sporih neutrona, stvarni potencijal interakcije se zamenjuje Fermijevim kvazipotencijalom. Polasna mreža je veoma velikih dimenzija, ali se potom redukuje na način koji nam dozvoljava da rekonstruišemo tačno rešenje sa talasnu funkciju. Dobljene rezultate koristimo za poredjenje rešenja za slučajeve stvarnog i uvedenog potencijala. Ovo nam dozvoljava da diskutujemo adekvatnost zamene stvarnog potencijala ovim potencijalom za razne elemente.

**ABSTRACT** - In this paper an electrical model is formed in order to solve the Schrödinger equation that describes the elastic scattering of thermal neutrons. In slow neutron physics, the true potential of interaction is substituted with the Fermi quasi-potential. Initially, a very large network is obtained, and later truncated in such a manner that allows us to reconstruct the correct solution for the wave function. The obtained results are used to compare the solutions in case the true potential and the introduced potential are applied. This allows us to discuss the adequacy of substituting the true potential with this potential for various elements.

### I. UVOD

Prvi električni model za stacionarnu Šredingerovu jednačinu dao je G. Kron, koristeći jednu lestvičastu LC mrežu [1]. Isti tip problema je rešavan i pomoću jedne kvazi-analogne mreže koja je pored operacionih pojačavača i integratora sadržala i generator funkcija i množač [2]. Takođe, učinjen je pokušaj da se Šredingerova jednačina reši pomoću mreže čiji su naponi čvorova predstavljali vremenski zavisnu talasnu funkciju. U tom cilju korišćeni su imaginarni otpornici [3]. Najzad, načinjen je električni model za rešavanje najopštijeg oblika Šredingerove jednačine, pomoću nestacionarnih žiratora [4].

U ovom radu rešavamo Šredingerovu jednačinu numerički, koristeći metod konačnih razlika za izvodjenje električnog modela. S obzirom da su granični uslovi u kvantnoj mehanici dati za dovoljno velike vrednosti radijusa, tačan model implicira veoma veliku mrežu. Stoga je neizbežno njeno redukovanje. Da bi smo ovo uradili, pretpostavljamo očekivani oblik rešenja, imajući u vidu poznato analitičko rešenje jednog sličnog problema u kvantnoj mehanici. Rezultati dobijeni iz mreže formirane na ovaj način biće testirani, pokazujući savršeno slaganje sa pretpostavljenim rešenjem.

### II. MODEL

U kvantnoj mehanici, dvodimenziono elastično rasejanje termalnih

neutrons je opisano Šredingerovom jednačinom sledećeg oblika [5]

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial y^2} + k^2 \Psi(x,y) = \frac{2M}{\hbar^2} \cdot U(x,y) \cdot \Psi(x,y) \quad (1)$$

gde je  $k^2 = (2M/\hbar^2) \cdot E$ . Ovde su  $\hbar, E, M$  i  $U(r)$  Plankova konstanta, totalna energija, redukovana masa, i potencijal interakcije, respektivno. Čestica-meta predstavlja centar našeg koordinatnog sistema. U vezi sa potencijalom interakcije  $U(r)$ , uvodi se radijus interakcije,  $a$ , koji je sa nuklearnu interakciju dat sa [5]

$$a = 1.2 \cdot A^{1/3} \quad (10^{-15} \text{ m}) \quad (2)$$

gde  $A$  predstavlja maseni broj mase. Potencijal interakcije zadovoljava sledeći uslov:  $U(r) \neq 0$  samo za  $r \leq a$ .

Jednačina (1) se može rešiti analitički, metodom Grinove funkcije. U oblasti gde je  $r \gg a$  rešenje je dato izrazom [5]

$$\Psi(x,y) = e^{iKz} - A(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3)$$

gde  $A(\theta)$  predstavlja amplitudu rasejanja, a  $\theta$  ugao rasejanja. Za termalne neutrone u izotropnim sistemima, tipične vrednosti za  $k, r, i A(\theta)$  su [5]

$$k = (2 \div 7) \cdot 10^9 \text{ (m}^{-1}\text{)}; \quad r \sim 10^{-10} \text{ m}; \quad A(\theta) \sim 10^{-14} \text{ m} \quad (4)$$

Imajući u vidu da je za sve elemente gde je elastično rasejanje od interesa  $A(\theta)$  realna veličina [6], i nezavisna od ugla rasejanja,  $\theta$ , (3) i (4) daju

$$\Psi(x,y) \equiv 1 - A/r \quad (5)$$

Uvedimo formalno novu promenljivu  $V(x,y) \equiv \Psi(x,y)$ , s obzirom da nam je namera da formiramo električni model u kojem je napon čvorova  $V$  analogan talasnoj funkciji  $\Psi$ . Tako sada u jednačini (1) umesto  $\Psi(x,y)$  možemo pisati  $V(x,y)$ . Jednačina (1) se može rešiti numerički, metodom konačnih razlika. Neka su  $V_{l,k}$  diskretne vrednosti funkcije  $V(x,y)$  u tačkama  $(x_l, y_k)$ . Takođe, neka je  $\Delta \equiv x_{l+1} - x_l = y_{k+1} - y_k$ . Zanimajući konačne razlike reda višeg od 4, (1) možemo pisati kao [7]

$$V_{l+2,k} + V_{l-2,k} + V_{l,k+2} + V_{l,k-2} - 16V_{l+1,k} - 16V_{l-1,k} - 16V_{l,k+1} - 16V_{l,k-1} + V_{l,k} (60 + 12 \cdot C \cdot U(r) \cdot \Delta^2 - 12k^2 \Delta^2) = 0 \quad (6)$$

gde je  $C \equiv 2M/\hbar^2$ .

Ako želimo da formiramo analognu mrežu, (6) treba interpretirati kao Kirhofov strujni zakon primenjen na čvor  $(l,k)$ . Ipak, jednačinu (6) je moguće znatno uprostiti. Pre nego što to uradimo, treba prethodno opisati potencijal interakcije. U ranijem tekstu je napomenuto da stvarni potencijal zadovoljava  $U(r) \neq 0$  samo za  $r \leq a$ , pri čemu je  $a$  dato sa (2). U fizici sporih neutrons, stvarni potencijal  $U(r)$  se samenzuje Fermijevim kvazipotencijalom

$$U(r) = \begin{cases} U \rightarrow \infty & (r=0) \\ U = 0 & (r \neq 0) \end{cases} \quad (7)$$

Sada je očigledno da je dodatna provodnost  $C \cdot U(r) \cdot \Delta^2$  neophodna samo u čvoru  $(0,0)$ , koji odgovara  $r=0$ . Imamo dakle teoretski beskonačnu provodnost koja spaja centralni čvor,  $(0,0)$  sa masom. Možemo stoga konstatovati da se centralni čvor nalazi na nultom potencijalu. Imamo takođe i dodatnu negativnu provodnost,  $-12k^2 \Delta^2$ , koja spaja svaki čvor sa masom. Ovaj član se može proceniti imajući u vidu (4), usled čega biramo korak  $\Delta$  reda  $10^{-10}$  m

$$12k^2\Delta^2 \sim 10^{-5} - 10^{-7} \quad (8)$$

Imamo sada uprošćenu verziju Kirhofovog strujnog zakona za svaki čvor (imajući u vidu da čvor (0,0) ima napon nula)

$$V_{12,k} + V_{2,k} + V_{k,-2} + V_{k,k+2} - 16V_{2,k} - 16V_{k,-2} - 16V_{k,k+2} + 60V_{k,k} = 0 \quad (9)$$

Ova modifikacija je ilustrovana na sl.1. Očigledno je da će naponi čvorova u ovoj uprošćenoj mreži biti nezavisni od odabranog koraka,  $\Delta$ , ukoliko je, naravno, on reda  $10^{-4}$  m, kako bi (8) bilo zadovoljeno.

Jednačina (5) pokazuje da za termalne neutrone, u svim slučajevima kada je potencijal interakcije konačan, za dovoljno velike vrednosti  $r$  možemo pisati  $V(r) = 1$ , sa zanemarljivom greškom. Fizički je logično pretpostaviti da ovo važi i u sličaju potencijala (7). Treba, dakle, formirati dovoljno veliku mrežu sa jediničnim graničnim generatorima, u kojoj bi svi čvorovi bili povezani na način prikazan na sl.1. U takvoj mreži, naponi čvorova bi predstavljali diskretne vrednosti rešenja jednačine (1). Imajući ovo u vidu, možemo formirati manju mrežu, stavljajući u svaki granični čvor generator odgovarajuće elektromotorne sile

$$E(r) = V_0(r) \quad (10)$$

gde  $V_0(r)$  predstavlja napon koji odgovara tom graničnom čvoru u prethodno opisanoj mreži. Takva mreža je prikazana na sl.2 (\*). Centralna simetrija nam dozvoljava da "savijemo" našu mrežu u jedan kvadrant, ne menjajući pri tom napone, kao što je pokazano na sl.3. Ako smo prethodno u mreži imali provodnosti  $G$ , sada ćemo na graničnom delu imati  $2G$ , a u unutrašnjosti  $4G$ , usled paralelne veze prouzrokovane savijanjem.

Da bi smo rešili pitanje graničnih generatora, imajući u vidu (10), moramo prvo utvrditi očekivani oblik rešenja,  $V_0(r)$ . U svim slučajevima kada je potencijal interakcije konačan, rešenje je dato sa (5), za  $r \gg a$ , pa stoga pretpostavljamo da je i ovde očekivano rešenje oblika

$$V_0(r) = 1 - \frac{\text{const}}{r} \quad (11)$$

posle izvesnog broja čvorova (gledano od centralnog čvora (0,0)).

Primećujući ponovo da je  $V_0(r)$  nezavisno od odabranog koraka, postaje očigledno da se konstanta u (11) može birati proizvoljno, ukoliko se odabere odgovarajući korak tako da (11) bude zadovoljeno. Kako bi pokazali efekat zamene stvarnog potencijala potencijalom (7), za svaki element od interesa odabraćemo korak tako da se konstanta poklopi sa amplitudom rasejanja za taj element. Ovo daje

$$V_0(r) = 1 - A/r \quad (12)$$

posle izvesnog broja čvorova. Analiza koja sledi biće sprovedena za ugljenik, za koji je  $A(6) = 0.661 \times 10^{-14}$  m [6]. Za sve ostale elemente, procedura je analogna.

### III. REZULTATI

Pretpostavićemo da je za  $r \gg G\Delta$  rešenje oblika (12). Rezultati do-

(\*) S obzirom da mreža na sl.2 predstavlja samo ilustraciju, ograničili smo se na samo 3 čvora u  $x$  i  $y$  pravcima kako bi pojednostavili crtanje. Mreža na sl.3 je generisana na isti način iz mreže istog oblika, samo sa 6 čvorova u pravcima  $x$  i  $y$ .

bijeni na ovaj način biće testirani, pokazujući savršeno slaganje sa pretpostavljenim rešenjem. Ako uzmemo u obzir ovu pretpostavku, kao i (10), granični generatori na sl.3 biće oblika

$$E(r) = \{-A/r \quad (13)$$

Ovo nam dozvoljava da tretiramo tačni napon u odredjenom čvoru,  $V_0(r)$ , kao rezultat superpozicije

$$V_0(r) = V_1(r) - V_2(r) \quad (14)$$

gde  $V_1(r)$  predstavlja napon kada je (videti sl.3)

$$E_1(r_i) = 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (15)$$

a  $V_2(r)$  kada je

$$E_2(r_i) = A/r_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad A = 0.661 \times 10^{-14} \text{ m} \quad (16)$$

Očigledno je da se  $V_1(r)$  može lako izračunati, ali  $V_2(r)$  predstavlja problem, s obzirom da su korak, pa time i  $r$ , nepoznati. Ipak, sa sl.3 proizilazi da se u raznim čvorovima (16) može pisati kao

$$E_1 = \frac{A}{\Delta} \cdot \frac{1}{6} \quad ; \quad E_2 = \frac{A}{\Delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad E_{12} = \frac{A}{\Delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{74}} \quad (17)$$

Ako  $V_3(r)$  predstavlja napon kada je

$$E_1 = 1/6 \quad ; \quad E_2 = 1/\sqrt{37} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad E_{12} = 1/\sqrt{74} \quad (18)$$

imamo

$$V_2(r) = \frac{0.661 \times 10^{-14}}{\Delta} \cdot V_3(r) \quad (19)$$

Podsetićemo na ovom mestu da smo pretpostavili da je tačno rešenje oblika (12) za  $r \geq 6\Delta$ . Usled toga, u čvoru 29 (sl.3), gde je  $r = \sqrt{41} \times \Delta = 6.4\Delta$  imamo

$$V_0 = 1 - \frac{0.661 \times 10^{-14}}{6.4 \cdot \Delta} \quad (20)$$

Primenjujući (14), (19) i (20) na čvor 29, možemo izračunati korak. Dobijena vrednost iznosi  $\Delta = 0.41 \times 10^{-14} \text{ m}$ . Zamenjujući ovo u (19), i koristeći (14), možemo izračunati tačne napone u svim čvorovima. Ove vrednosti su date na sl.4. Ako je naša pretpostavka da je tačno rešenje oblika (12) za  $r \geq 6\Delta$  ispravna, tada dobijene vrednosti za  $V_0(r)$  moraju biti u saglasnosti sa ovom pretpostavkom. Sa sl.4 se vidi da je saglasnost potpuna. Ovaj zaključak smo testirali tako što smo pretpostavili nekoliko drugih oblika za tačno rešenje, ponavljajući potom gornji postupak. U svim slučajevima, dobijene vrednosti za  $V_0(r)$  se nisu slagale sa pretpostavljenim oblikom rešenja. Možemo stoga da zaključimo da su vrednosti za  $V_0(r)$  (sl.4) diskretne vrednosti rešenja jednačine (1).

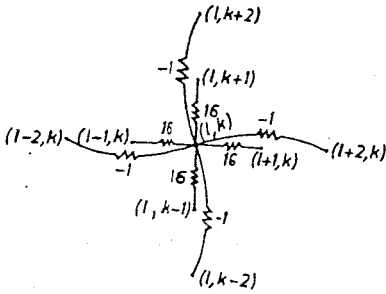
#### IV. ZAKLJUČAK

U ovom radu, napravljen je električni model za rešavanje Šredingerove jednačine koja opisuje elastično rasejanje termalnih neutrona. Koristeći dobijene rezultate, izračunavamo tačni korak za svaki element (naravno, zamenjujući prethodno konstantu u (11) sa odgovarajućom amplitudom rasejanja). Dalje, za svaki element odredjujemo radijus  $r_0$  nakon kojeg rešenje ima oblik (12), kao  $r_0 = 6\Delta$ . Ovo nam omogućava da uporedimo rešenja za slučajeve tačnog potencijala i potencijala (7).

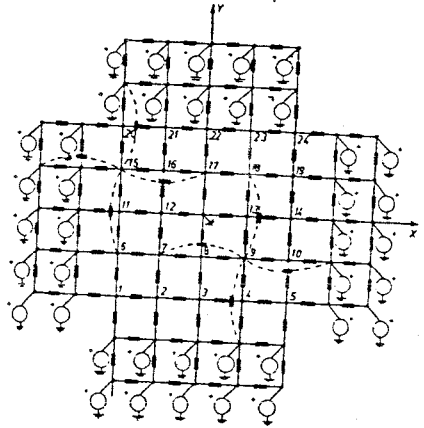
Treba na kraju istaći koje su prednosti prilaza preko električnih mreža. Kao prvo, možemo efikasno da iskoristimo centralnu simetriju problema kako bi povećali broj čvorova u jednom kvadrantu ne menjajući pri tom ukupan broj jednačina. Kao drugo, ovakav pristup nam dozvoljava da rekonstruišemo tačno rešenje na vrlo direktan način i sa dobrom tačnošću koristeći granične generatore i teoremu superpozicije. Moramo naglasiti da ovakvim pristupom zamenjujemo rešavanje ogromnog sistema rešavanjem sistema od 35 linearnih algebarskih jednačina.

## LITERATURA

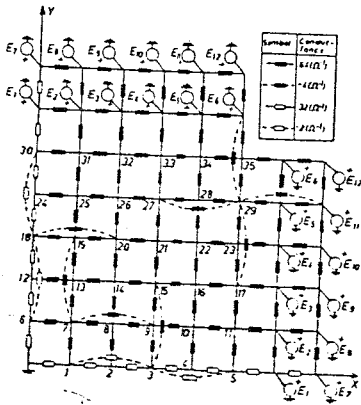
- [1] G. Kron, "Electric Circuit Model of the Schrödinger Equation", Phys. Review, Vol. 67, No. 1-2, pp. 39-43, Jan. land. 15, 1945.
- [2] J. B. Marion and J. L. Fowler, "Fast Neutron Physics", Interscience Publ., 1963, New York, Pt. I, pp. 932-934, Pt. II, pp. 1057-1111.
- [3] P. P. Civalleri, "Su una linea elettrica equivalente alla equazione di Schrödinger unidimensionale", Alta Frequenza, Vol. 66, No. 3, pp. 161-163, March 1977.
- [4] M. Milčić, "A Network Model for Solving the Nonstationary Schrödinger Equation", Proc. 24th ETAN Conf. 1980, Priština, pp. I 141-I 148.
- [5] V. F. Turchin, "Slow Neutrons", Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- [6] I. I. Gurevich, L. V. Tarasov, "Low Energy Neutron Physics", North Holland, Amsterdam, 1968.
- [7] B. P. Demidovich, I. A. Maron, "Computational Mathematics", Mir Publishers, Moscow, 1973.



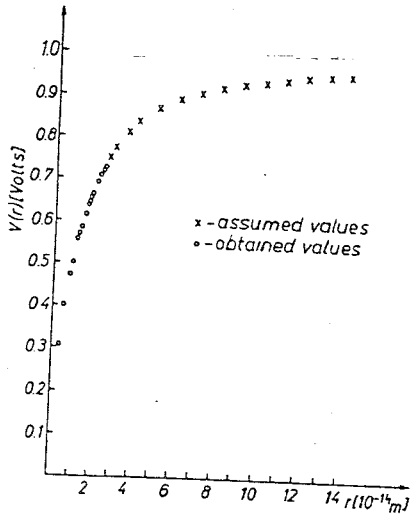
Sl.1 - Čvor  $(l, k)$  i način na koji je povezan sa ostalim čvorovima u mreži. Provodnosti su date u  $(\Omega^{-1})$ .



Sl.2 - Provodnosti na punim linijama su  $16(\Omega^{-1})$ , a one na isprekidanim su  $-1(\Omega^{-1})$ . Negativne provodnosti odgovaraju svakom čvoru, ali je zbog jednostavnosti ovo ilustrirano za samo dva čvora.



Sl.3 - Negativne provodnosti odgovaraju svakom čvoru, ali je to zbog jednostavnosti ilustrirano samo za 4 čvora.



Sl.4 - Tačni naponi čvorova dati kao funkcija od  $r$  za ugljenik.