XXVI JUGOSLOVENSKA KONFERENCIJA ETAN-a, SUBOTICA, 7 — 11. JUNA 1982. GODINE

D. Matko R. Schumann*, B. Zupančič
Fakulteta za elektrotehniko
Ljubljana, Tržaška 25
Yugoslavia
* Institut fuer Regelungstechnik
Technische Hochschule Darmstadt
Schlossgraben 1, Darmstadt,
F.R. Germany

KOMPARATIVNA ANALIZA STOHASTIČNE KONVERGENCE SEDMIH REKURZIVNIH METOD ZA OCENJEVANJE PARAMETROV

COMPARATIVE STOCHASTIC CONVERGENCE ANALYSIS OF SEVEN RECURSIVE PARAMETER ESTIMATION METHODS

VSEBINA - Članek obravnava komparativno analizo stohastične konvergence sedmih metod za ocenjevanje parametrov. Štiri izmed njih (metoda najmanjših kvadratov, metoda pomožnih spremenljivk, razširjena metoda najmanjših kvadratov in metoda največje podobnosti) so metode s posplošenim pogreškom in tri (s fiksnim kompenzatorjem, z nastavljivim kompenzatorjem in z razširjenim modelom) metode z izhodnim pogreškom. Pri analizi je uporabljena metoda navadnih diferencialnih enačb (ODE) in Martingaleov konvergenčni teorem. Podana je primerjava metod glede na potrebne predpostavke.

ABSTRACT - Four generalized error recursive parameter estimation methods (least squares, instrumental variables, extended least squares, maximum likelihood) and three output error methods (fixed compensator, adjustable compensator, extended estimation model) are compared and analysed for the stochastic case using the ODE (Ordinary Differential Equation) method. Additionally, an alternative analysis method using martingale theory is discussed and compared with the ODE method with respect to the assumptions necessary for the convergence proofs.

1. UVOD

V zadnjem desetletju se je pojavilo precejšnje število metod za ocenjevanje parametrov. Pričujoči članek obravnava sedem izmed njih in jih primerja analitično z metodo navadnih diferencialnih enačb (ODE) [6,7] in z Martingaleovim konvergenčnim teoremom (MGCT) in sicer: metodo najmanjših kvadratov (RLS), metodo pomožnih spremenljivk (RIV) [15], razširjeno metodo najmanjših kvadratov z apriori pogreškom (RELS) [9,14] in z aposteriornim pogreškom (AML) [16], metodo največje podobnosti (RML) [1,10], metodo izhodnega pogreška s fiksnim kompenzatorjem (ROFC) [3,4], in s spremenljivim kompenzatorjem (ROAC)

[5] in metodo izhodnega pogreška z razširjenim modelom (ROEM) [5], ki je ekvivalentna metodi AML. Vse metode so uporabljene za razred linearnih, časovno diskretnih procesov z enim vhodom in enim izhodom, ki jih opisuje diferenčna enačba

$$y(k) = G(q^{-1})u(k)+n(k) \tag{1}$$

kjer je

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\, q^{-d} = \frac{b_1 q^{-1}+\ldots+b_{nb} q^{-nb}}{1+a_1 q^{-1}+\ldots+a_{na} q^{-na}}\, q^{-d} \tag{2}$$

q^{-1} je operator časovnega premika, d je diskretni zakasnitveni čas in n(k) je izhodni šum, ki ga dobimo iz originalnega šuma v(k) s srednjo vrednostjo 0 in končno varianco po formuli

$$n(k) = G_v(q^{-1})v(k) \tag{3}$$

Tabela I prikazuje modeliranje šumnega signala za posamezne metode

Metoda	$G_v(q^{-1})$	Ocenjeni polinomi
RLS	$1/A(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$
RIV	$1/A(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$
RELS	$D(q^{-1})/A(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$
RML	$D(q^{-1})/A(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$
ROFC	$1/A(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$
ROAC	$1/C(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$
ROEM	$D(q^{-1})/A(q^{-1})$	$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$
$C(q^{-1})=1+c_1 q^{-1}+\ldots+c_{nc} q^{-nc}$ $D(q^{-1})=1+d_1 q^{-1}+\ldots+d_{nd} q^{-nd}$		

Tabela I. Modeliranje šuma

Predpostavljamo, da so poznane stopnje polinomov na, nb, nc, nd in diskretni zakasnitveni čas d.

2. ENOTEN OPIS METOD

Na osnovi enotnega opisa metod za RLS, RIV, RELS in RML [11] lahko zapišemo vseh sedem metod z naslednjim, posplošenim algoritmom.

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\theta}}(k) &= \hat{\underline{\theta}}(k-1)+\gamma(k)\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k)\varepsilon^{o}(k) = \\ &= \hat{\underline{\theta}}(k-1)+\frac{\gamma(k)\underline{P}(k-1)\underline{\varphi}(k)\varepsilon^{o}(k)}{\lambda(k)+\gamma(k)\underline{X}^{T}(k)\underline{P}(k-1)\underline{\varphi}(k)}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\underline{P}^{-1}(k) = \lambda(k)\underline{P}^{-1}(k-1)+\gamma(k)[\underline{\varphi}(k)\underline{\chi}^T(k)] \qquad (5)$$

$$0<\lambda(k)\leq 1 \qquad 0<\gamma(k)<2$$

oziroma z uporabo leme za invertiranje matrik

$$\underline{P}(k) = [\underline{P}(k-1) - \frac{\gamma(k)\underline{P}(k-1)\underline{\varphi}(k)\underline{\chi}^T(k)\underline{P}(k-1)}{\lambda(k)+\gamma(k)\underline{\chi}^T(k)\underline{P}(k-1)\underline{\varphi}(k)}]\frac{1}{\lambda(k)} \qquad (6)$$

$\gamma(k)$ predstavlja utež aktualnih podatkov in $\lambda(k)$ faktor pozabljanja preteklih podatkov v času k. Pomen $\hat{\underline{\theta}}(k)$, $\hat{\underline{\theta}}_m(k)$, $\underline{\psi}(k)$, $\underline{\varphi}(k)$, $\underline{\chi}(k)$ in $\varepsilon^O(k)$ zavisi od uporabljene metode in je podan v tabeli II, kjer sta a'priorni in a'posteriorni pogrešek podana z enačbama

$$\begin{aligned} e^O(k) &= y(k)-y_m^O(k) = y(k)-\underline{\psi}^T(k)\hat{\underline{\theta}}_m(k-1) \\ e(k) &= y(k)-y_m(k) = y(k)-\underline{\psi}^T(k)\hat{\underline{\theta}}_m(k) \end{aligned} \qquad (7)$$

Model procesa (1), (2) in (3) lahko s pomočjo tabele I prepišemo v naslednjo obliko

$$y(k) = \underline{\psi}_o^T(k)\underline{\theta}_o+v(k) \qquad (8)$$

kjer je $\underline{\theta}_o$ vektor procesnih parametrov in vektor $\underline{\psi}_o(k)$ ekvivalenten vektorju $\psi(k)$, le da so pogreški e(k) zamenjani z dejanskim šumom v(k).

3. ANALIZA Z METODO ODE

Ideja metode ODE [6,7] je prirediti diferenčnima enačbama (4) in (5) dve diferencialni enačbi, katerih stabilnostne lastnosti vsebujejo vse potrebne informacije o konvergenci originalnih diferenčnih enačb. Pri tem je potrebno vpeljati

$$\underline{R}(k) = \frac{1}{k}\underline{P}^{-1}(k) \qquad (9)$$

in naslednjih pet predpostavk.

predpostavka 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{k} = \infty$ (10)

predpostavka 2: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma(k)}{k}\right)^{\delta} < \infty; \delta > 1$

predpostavka 3: $\lambda(k) = 1$

predpostavka 4: $\underline{R}(k) > 0$ (pozitivno definitna)

Metoda	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$\hat{\underline{\theta}}_m^T(k)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$\underline{\varphi}^T(k)$	$\underline{\chi}^T(k)$	$\varepsilon^o(k)$
RLS	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k),$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)]$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y(k-1),\ldots,-y(k-na),$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb)]$	$\underline{\psi}^T(k)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$e^o(k)$
RIV	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k),$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)]$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y(k-1),\ldots,-y(k-na),$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb)]$	$[-h(k-1),\ldots,-h(k-na),$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb)]$ $h(z)=\frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})}u(z)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$e^o(k)$
RELS (a priori pogrešek)	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k)$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)]$ $\hat{d}_1(k),\ldots,\hat{d}_{nd}(k)$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y(k-1),\ldots,-y(k-na)$ $u(k-d-1,\ldots,u(k-d-nb),$ $e^o(k-1),\ldots,e^o(k-nd)]$	$\underline{\psi}^T(k)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$e^o(k)$
RELS (a posteriori pogr. AML)	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k)$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)]$ $\hat{d}_1(k),\ldots,\hat{d}_{nd}(k)$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y(k-1),\ldots,-y(k-na)$ $u(k-d-1,\ldots,u(k-d-nb),$ $e(k-1),\ldots,e(k-nd)]$	$\underline{\psi}^T(k)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$e^o(k)$
RML	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k)$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)$ $\hat{d}_1(k),\ldots,\hat{d}_{nd}(k)]$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y(k-1),\ldots,-y(k-na)$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb)$ $e^o(k-1),\ldots,e^o(k-nd)]$	$[-y'(k-1),\ldots,-y'(k-na),$ $u'(k-d-1),\ldots,u'(k-d-nb)$ $e'(k-1),\ldots,e'(k-nd)]$ $y'=\frac{1}{\hat{C}(z^{-1})}y$ etc.	$\underline{\varphi}^T(k)$	$e^o(k)$
ROPC	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k)$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)]$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y_m(k-1),\ldots,-y_m(k-na)$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb)]$	$\underline{\psi}^T(k)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$e^o(k)$
ROAC	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k),$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k),$ $-\hat{c}_1(k),\ldots,-\hat{c}_{nc}(k)]$	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k)$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k)]$	$[-y_m(k-1),\ldots,-y_m(k-na),$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb)]$	$[-y_m(k-1),\ldots,-y_m(k-na),$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb),$ $e(k-1),\ldots,e(k-nc)]$	$\underline{\varphi}^T(k)$	$e^o(k)+$ $[\hat{C}(q^{-1})-1]e(k)$
ROEM	$[\hat{a}_1(k),\ldots,\hat{a}_{na}(k),$ $\hat{b}_1(k),\ldots,\hat{b}_{nb}(k),$ $\hat{d}_1(k),\ldots,\hat{d}_{nd}(k)]$	$\hat{\underline{\theta}}^T(k)$	$[-y_m(k-1),\ldots,-y_m(k-na),$ $u(k-d-1),\ldots,u(k-d-nb),$ $e(k-1),\ldots,e(k-nd)]$	$\underline{\psi}^T(k)$	$\underline{\psi}^T(k)$	$e^o(k)$

Tabela II. Enoten opis metod

predpostavka 5: proces in ocenjeni model (vsaj za $k \to \infty$) sta stabilna)

Podrobna razlaga teh predpostavk je podana v literaturi [8]. Prirejeni diferencialni enačbi sta:

$$\frac{d}{d\tau}\,\underline{\Theta}(\tau) = \underline{R}^{-1}(\tau)\; E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\varepsilon}^{c}(k,\underline{\Theta})\} \tag{11}$$

$$\frac{d}{d\tau}\,\underline{R}(\tau) = E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{X}}^{T}(k,\underline{\Theta})\} - \underline{R}(\tau) \tag{12}$$

kjer pomeni $\bar{\ }$ vpeljavo stacionarnih procesov (procesov, ki bi bili dobljeni pri fiksnem vektorju $\underline{\theta}$). Takšni procesi obstajajo zaradi predpostavke 5.

Asimptotična stabilnost sistema (11),(12) pogojuje konvergenco z verjetnostjo 1 sistema (4), (5) in stabilne stacionarne točke diferencialnih enačb so edine možne konvergenčne točke pripadajočih stohastičnih diferenčnih enačb [6] .

Če definiramo

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}_o - \underline{\theta} \tag{13}$$

lahko s pomočjo tabele II zapišemo pogrešek vseh metod v naslednji obliki [8]

$$\bar{\varepsilon}^{c}(k,\underline{\Theta}) = \bar{\underline{\psi}}_F^{T}(k,\underline{\Theta})\,\Delta\underline{\Theta} + v(k) \tag{14}$$

kjer je $H(q^{-1})$ podan v tabeli III in

$$\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta}) = H(q^{-1})\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}) \tag{15a}$$

Metoda	RLS	RIV	RELS	RML	ROFC	ROAC	ROEM
$H(q^{-1})$	1	1	$1/D(q^{-1})$	$1/D(q^{-1})$	$C_c(q^{-1})/A(q^{-1})$	$C(q^{-1})/A(q^{-1})$	$1/D(q^{-1})$

Tabela III. Definicija $H(q^{-1})$ za posamezne metode

Diferencialni enačbi (11) in (12) je potrebno analizirati glede na:

a) stacionarne točke ($\to$ možne konvergenčne točke)

b) lokalno stabilnost ($\to$ lokalne konvergenčne lastnosti)

c) globalno stabilnost ($\to$ globalne konvergenčne lastnosti)

a) Stacionarne točke (11) in (12) so definirane z $\frac{d}{d\tau}\,\underline{\Theta}(\tau) = \underline{O}$, $\frac{d}{d\tau}\,\underline{R}(\tau) = \underline{O}$. oziroma

$$\underline{\Theta}^{*} = \underline{\Theta}_o + [E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^{*})\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta}^{*})\}]^{-1}E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^{*})v(k)\} = \underline{\Theta}_o + \text{bias} \tag{16}$$

Če vstavimo $\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^{*})$ (tabela II) in $\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta}^{*})$ (15 in tabela III), dobimo konvergenčne lastnosti, ki so podane v tabeli IV.

Metoda	Pristranskost (bias)		ni biasa če
RLS	$[E\{\bar{\underline{\psi}}(k)\bar{\underline{\psi}}^T(k)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k)v(k)\}$	$v(k)$ beli šum
RIV	$[E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}^T(k)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)v(k)\}$	$\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)$ nekoreliran z $v(k)$
RELS ROEM	$[E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\Theta^*)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)v(k)\}$	$v(k)$ beli šum
RML	$[E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}$	$E\{\varphi(k,\underline{\Theta}^*)v(k)\}$	$v(k)$ beli šum
ROFC	$[E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)v(k)\}$	$\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)$ nekoreliran z $v(k)$
ROAC	$[E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)v(k)\}$	$v(k)$ beli šum

Tabela IV. Stacionarne točke

b) Lokalno konvergenco raziskujemo z linearizacijo (11) in (12) okrog stacionarnih točk z $\frac{d}{d\tau}\underline{R}(\tau) = \underline{O}$

$$\frac{d}{d\tau}(\underline{\Theta}-\underline{\Theta}^*) = -[E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\chi}}^T(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta}^*)\}\cdot[\underline{\Theta}-\underline{\Theta}^*] =$$

$$= -\underline{M}_1^{-1}\underline{M}_2[\underline{\Theta}-\underline{\Theta}^*] = -\underline{M}[\underline{\Theta}-\underline{\Theta}^*] \qquad (17)$$

Analiza lokalne konvergence je možna s pomočjo dveh teoremov [6], ki pravita, da ima $\underline{M}$ vse lastne vrednosti v desni polravnini (17 je stabilna), če je $\underline{M}_1$ pozitivno definitna simetrična matrika in če sta vektorja $\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)$ in $\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta}^*)$, ki tvorita matriko $\underline{M}_2$ povezana preko pozitivno realne prenosne funkcije $H(z^{-1})$ (glej 15). Lokalne konvergenčne lastnosti podaja tabela V.

Metoda	$\underline{M}=\underline{M}_1^{-1}\underline{M}_2$		Pogoji za lokalno stabilnost	
RLS	$\underline{I}$		---	
RIV	$\underline{I}$		---	
RELS ROEM	$[E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}^T(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}$	$E\{\psi(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta}^*)\}$	$1/D(z^{-1})$	P.R.
RML	$\underline{I}$		---	
ROFC	$[E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}^T(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta}^*)\}$	$C_c(z^{-1})/A(z^{-1})$	P.R.
ROAC	$[E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\varphi}}^T(k,\underline{\Theta}^*)\}]^{-1}$	$E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta}^*)\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta}^*)\}$	$C(z^{-1})/A(z^{-1})$	P.R.

Tabela V. Lokalne konvergenčne lastnosti (P.R. = poz.realen)

c) Globalne konvergenčne lastnosti lahko raziščemo s pomočjo Liapunove funkcije

$$V = \Delta\underline{\Theta}^T\underline{R}(\tau)\Delta\underline{\Theta} \qquad (18)$$

oz njenega odvoda

$$\frac{d}{d\tau} V = -\Delta\underline{\Theta}^T(\underline{N}+\underline{R}(\tau))\,\Delta\underline{\Theta} \tag{19}$$

kjer je

$$\underline{N} = E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta})\}+E\{\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\varphi}}^T(k,\underline{\Theta})\}-E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\chi}}^T(k,\underline{\Theta})\} \tag{20}$$

Stacionarna točka je globalno stabilna, če je $[\underline{N}+\underline{R}(\tau)]$ pozitivno definitna matrika, to je glede na teorem [6], če je $\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})=\bar{\underline{\chi}}(k,\underline{\Theta})$ in če je prenosna funkcija $(H(z^{-1})-1/2)$ pozitivno realna. Tabela VI podaja globalne konvergenčne lastnosti posameznih metod.

Metoda	$\underline{N}$	*Pogoji za globalno stabilnost*
RLS	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k)\bar{\underline{\psi}}^T(k)\}$	-
RIV	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k)\bar{\underline{\varphi}}^T(k)\}$	?
RELS ROEM	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\Theta)\}+E\{\bar{\underline{\psi}}_F(k,\Theta)\bar{\underline{\psi}}^T(k,\Theta)\}-E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}^T(k,\underline{\Theta})\}$	$(\frac{1}{D(z^{-1})}-\frac{1}{2})$ P.R.
RML	$E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta})\}+E\{\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\varphi}}^T(k,\underline{\Theta})\}-E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\varphi}}^T(k,\Theta)\}$	?
ROFC	$E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta})\}+E\{\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}^T(k,\underline{\Theta})\}-E\{\bar{\underline{\psi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}^T(k,\underline{\Theta})\}$	$(\frac{C_C(z^{-1})}{A(z^{-1})}-\frac{1}{2}$ P.R.
ROAC	$E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\psi}}_F^T(k,\underline{\Theta})\}+E\{\bar{\underline{\psi}}_F(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\varphi}}^T(k,\underline{\Theta})\}-E\{\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})\bar{\underline{\chi}}^T(k,\underline{\Theta})\}$	$(\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}-\frac{1}{2}$ P.R.

Tabela VI. Globalne konvergenčne lastnosti posameznih metod

4. ANALIZA Z MARTINGALEOVIM TEOREMOM

Alternativno analizo omogoča MGCT [2,12,13] s katerim je možno analizirati globalno konvergenco metod RLS, AML in ROFC. Pri analizi uporabimo funkcijo

$$V(k) = \Delta\underline{\Theta}\,\underline{P}^{-1}(k)\Delta\underline{\Theta}+2\left(\sum_{i=0}^{k}\gamma(i)q(i)p(i)+c^2\right) \tag{21}$$

kjer je

$$c^2<\infty\ ;\quad 0<\varepsilon_1<<1 \tag{22}$$

in

$$q(k) = \underline{\psi}^T(k)\Delta\underline{\Theta}(k) = 1/H(q^{-1})[e(k)-v(k)] \tag{23}$$

$$p(k) = e(k)-v(k)-q(k)(1+\varepsilon_1)/2 = \left[H(q^{-1})-\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon_1)\right]q(k) \tag{24}$$

z uporabo enačb (5) in (6) dobimo naslednjo rekurzijo za V(k):

$$E\left[\frac{V(k)}{k}\,\middle|\,k-1\right] \le \frac{V(k-1)}{k-1} - \frac{V(k-1)}{k(k-1)} - \frac{\gamma(k)}{k}\,\varepsilon_1[\underline{\psi}^T(k)\Delta\underline{\Theta}(k)]^2+$$

$$+2\gamma^2(k)\underline{\psi}^T(k)\,\frac{\underline{P}(k)}{k}\,\underline{\psi}(k)\sigma_v^2 \tag{25}$$

kjer je σ varianca šuma v. Glede na MGCT mora biti V(k) pozitiven, kar pogojuje

$$\sum_{i=0}^{k}\gamma(i)q(i)p(i) > -c^2 > -\infty \tag{26}$$

t.j. pozitivna realnost prenosne funkcije $(H(z^{-1})-(1+\varepsilon_1)/2)$, ki veže p(k) in q(k), primerjaj (24) in pogoj $\gamma(k)\le\gamma(k-1)$ [2].

MGCT pravi: če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\gamma^2(k)\underline{\psi}^T(k)\underline{P}(k)\underline{\psi}(k)<\infty \tag{27}$$

potem je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(k-1)}{k(k-1)} < \infty \qquad \text{z verjetnostjo 1.(z.v.1)} \tag{28}$$

in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma(k)}{k}\, \varepsilon_1[\underline{\psi}^T(k)\Delta\underline{\Theta}(k)]^2 < \infty \qquad \text{z.v.1} \tag{29}$$

in $V(k)/k$ konvergira z.v.1 k neki končni, nenegativni naključni spremenljivki. Glede na omejenost vsote (28) z.v.1 sledi $(V(k-1)/(k-1)) \to 0$ z.v.1 in posledično $V(k)/k \to 0$ z.v.1. Konvergenca parametrov $\Delta\Theta \to \underline{0}$ z.v.1 sledi iz enačbe (21), če je

$$\lim_{k\to\infty} (P^{-1}(k)/k) > 0 \qquad \text{pozitivno definitna} \tag{30}$$

t.j., če je izpolnjena predpostavka ODE 4. Le-ta je izpolnjena, če je proces identifikabilen in stalno vzbujan. Če je proces stabilen (predpostavka ODE 5), je pogoj (30) izpolnjen, če je $\lambda(k) = 1$ (predpostavka ODE 3) in če $\gamma(k)$ ne limitira k 0 (predpostavka ODE 1). Pod temi pogoji limitira $\underline{\psi}^T(k)\underline{P}(k)\underline{\psi}(k)$ k nič s hitrostjo $1/k$ [12,13] in pogoj (27) postane ekvivalenten predpostavki ODE 2 za $\delta = 2$.

Ti rezultati se ujemajo z rezultati, ki smo jih dobili z ODE metodo. Če je $\varepsilon_1 > 0$ potem sledi iz omejenosti vsote (29) z.v.1 konvergenca $\underline{\psi}^T(k)\Delta\underline{\Theta}(k)\to 0$ z.v.1 za $k \to \infty$ in ker pozitivna realnost filtra $H(z^{-1})$ implicira njegovo stabilnost, sledi $e(k) \to v(k)$ z.v.1 (glej 23).

5. ZAKLJUČEK

Iz gornjih rezultatov sledi, da je metoda RLS najbolj uporabna metoda glede na lokalne in globalne konvergenčne lastnosti. Edina slaba točka te metode je pristranska ocena parametrov (bias), če $v(k)$ ni beli šum. Vse ostale metode skušajo eliminirati to pomanjkljivost glede na (16) in sicer tako, da skušajo narediti $\bar{\underline{\varphi}}(k,\underline{\Theta})$ neodvisen od $v(k)$ (ROFC, RIV) ali pa s posploševanjem šumnega modela (RELS, ROEM, RML). To izboljšanje glede na pristranskost pa ima za posledico poslabšanje konvergenčnih lastnosti: konvergenca metod je zagotovljena le, če je izpolnjen določen pogoj glede pozitivne realnosti (pgoja ni moč verificirati v naprej!). Metodi RIV in RML skušata izločiti ta pogoj z dodatnim filtriranjem, ki uporablja ocenjene parametre namesto pravih. Ker pa ti parametri sovpadajo le v bližini nepristransko ocenjene stacionarne točke, lahko zagotovita le lokalno konvergenco, ne pa globalne.