

B. Zelenko  
Institut "Rađe Končar", Zagreb

PROGRAM PRORAČUNA INDUKCIJE U ŽELJEZU NA SEKTORU KRUŽNOG  
VIJENCA

1. Uvod. Raspodjela magnetske indukcije u pojedinim dijelovima električnih strojeva i drugih proizvoda obično se određuje približno. Međutim, zahtjevi o proizvodu postoje sve veći pa se dosadašnji proračuni žele poboljšati. Tako se dolazi do zadatka da se što točnije odredi raspodjela magnetske indukcije u čitavu stroju ili u nekom njegovu dijelu.

Osobn od načina da se poboljšaju dosadašnji proračuni je taj da se odredi stacionarno magnetsko polje za koje vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J}, \\ \vec{H} &= \nu \vec{B}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \end{aligned} \quad (1)$$

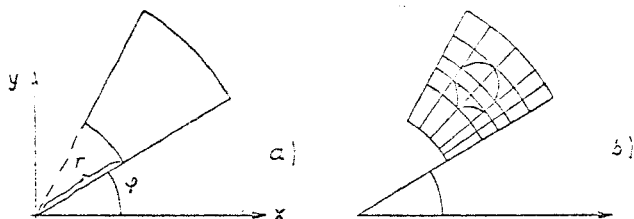
Kod toga je  $\vec{H}$  vektor jakosti magnetskog polja,  $\vec{B}$  vektor magnetske indukcije,  $\vec{J}$  vektor gustoće struje,  $\nu$  reluktancija,  $\vec{A}$  vektorpotencijal magnetskog polja. Ovaj se trodimenzionalni problem pojednostavnjuje tako da se promatra samo dvodimenzionalni problem kod kojeg je vektor  $\vec{J}$  gustoće struje okomit na ravninu  $(x, y)$ . Dobiva se parcijalna diferencijalna jednačba

$$\frac{\partial(\nu \frac{\partial A}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\nu \frac{\partial A}{\partial y})}{\partial y} = -J. \quad (2)$$

Ovdje je  $J = J(x, y)$  iznos vektorpotencijala koji je okomit na ravninu  $(x, y)$ . Ako se promatraju feromagnetni materijali, reluktancija  $\nu$  ovisi o koordinatama  $x, y$  i o iznosu  $B$  indukcije:

$$\nu = \nu(x, y; B), \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}, \quad B_x = -\frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3)$$

U ovom ćemo članku opisati jednu od metoda nalaženja indukcije u slučaju da promatramo područje kome je rub sektor kružnog vijenca (sl. 1), a na rubu je zadani magnetski vektorpotencijal  $A$ . U nekoj točki područja se traži gustoća struje ako je na tom mjestu materijal nemagnetski. Umjesto pravokutnih koordinata upotrebljavat će



Slika 1. Područje u kome se traži indukcija

se polarne koordinate (sl. 1, a). Rubovi područja su pravci  $\varphi = \text{konst}$  i kružnice  $r = \text{konst}$ .

2. Metoda rješavanja. Čitavo područje prema slici 1 dijeli se na konačan broj "elementarnih" dijelova pomoću porodica krivulja  $r = \text{konst}$  i  $\varphi = \text{konst}$ . Pojedini elementarni dio ima opet oblik sektora kružnog vijenca. Na takvom dijelu ćemo smatrati da  $A$  ovisi od  $r$  i  $\varphi$  bilinearano:

$$A = \alpha + \beta \cdot \varphi + \gamma \cdot r + \delta \cdot \varphi \cdot r. \quad (4)$$

Posebno se može zadati da je takav "četverokutni" dio razdijeljen na dva trokutna dijela krivuljom koja ima jednostavnu jednačbu  $r = a + b \cdot \varphi$  (Arhimedova spirala, sl. 1, b). U tako dobivenim susjednim elementarnim dijelovima mogu biti različiti magnetski materijali odnosno različite gustoće struja. Za svaki takav dio smatra se da vrijedi linearna ovisnost  $A$  od  $r$ ,  $\varphi$ , dakle (4) uz  $\delta = 0$ .

Magnetski potencijali  $A(r, \varphi)$  određeni su potpuno i neprekinuto ako su poznate vrijednosti od  $A$  u čvorovima, tj. u presjecištima spomenutih pravaca i kružnica.

Umjesto da promatramo jednačbu (2) u polarnim koor-

dinamika, primijenit ćemo ekvivalentan izraz

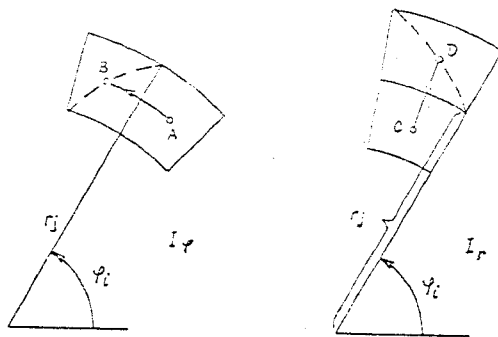
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad (5)$$

kojega se integrira po krivulji koja se nalazi u promatranjnoj ravlini i obuhvaća površinu kroz koju okomito teče struja jakosti  $I$ .

Krivulje preko kojih će se integrirati prolaze kroz sredine susjednih područja. Promatrat ćemo samo dvije vrste tih krivulja: lukove na koncentričnim kružnicama i dužine na pravcima kroz ishodište. Odgovarajući integrali:

$$I_p = \int_{\widehat{AB}} \vec{H} \cdot d\vec{l}, \quad I_r = \int_{\widehat{CD}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (6)$$

se daću izraziti linearno pomoću potencijala u susjednim dvorovima ako smatramo da je reluktancija u elementarnim dijelovima konstantna (slika 2). Svaki čvor ćemo okruži-



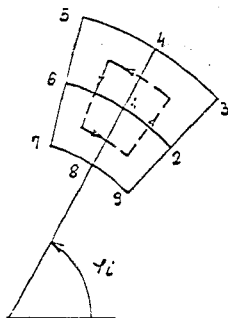
Slika 2. Dva oblika krivulja za računanje integrala prema (5) i (6)

ti pomoću 4 takve krivulje (slika 3), pa dobivamo ovisnost između 9 potencijala  $A_1, \dots, A_9$ :

$$A_1 \cdot \alpha_1 + \dots + A_9 \cdot \alpha_9 = I, \quad (\alpha_1 = \alpha_2 + \dots + \alpha_9). \quad (7)$$

Kod toga je  $I$  ukupna struja koja je obuhvaćena zatvorenom krivuljom. Na taj se način dobiva onoliko jednačbi koliko ima čvorova. Ove jednačbe zapravo nisu linearne jer koeficijenti  $\alpha_i$  ovise o indukciji  $B$ , a ona je određena potencijalima  $A_i$  u čvorovima na rubu pojedinog elementar-

nog dijela. Ako reluktanciju u pojedinom dijelu smatramo konstantnom i poznatom, onda sve jednačbe (7) čine sustav



Slika 3. Put integracije za dobivanja jednačbe (7)

od mnogo linearnih jednačbi. Te se jednačbe mogu rješavati iterativno tako da se nova vrijednost  $A_1$  nov računa pomoću susjednih vrijednosti potencijala i pomoću stare vrijednosti  $A_1$  star potencijala u tom čvoru ovako:

$$A_1 = \frac{I - \alpha_2 A_2 - \dots - \alpha_9 A_9}{\alpha_1}, \quad \left. \vphantom{A_1} \right\} \quad (8)$$

$$A_1 \text{ nov} = A_1 \text{ star} + \omega (A_1 - A_1 \text{ star})$$

To je metoda sukcesivne nadrelaksacije (S.O.R.). Faktor  $\omega$  nadrelaksacije odabire se između 1 i 2.

Zbog promjene "računske indukcije" tokom iterativnog postupka treba uzeti u obzir i promjenu računске reluktancije na elementarnim dijelovima. Nove vrijednosti reluktancija se određuju pomoću "podrelaksacije":

$$\nu_{\text{nov}} = \nu_{\text{star}} + (\nu' - \nu_{\text{star}}) / F, \quad (9)$$

gdje je  $\nu'$  reluktancija koja pripada računskoj indukciji prema magnetskoj karakteristici materijala (vidi [1]). Nazivnik  $F$  u (9) iznosi na primjer 10 ili 20.

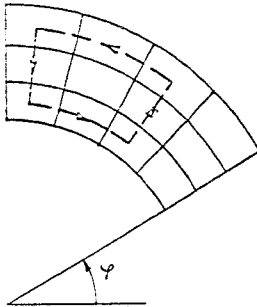
Tom podrelaksacijom reluktancija je ublažena nelinearnost problema.

Zbog velike razlike reluktancija između zraka i magnetskog materijala iteracioni postupak (8) sporo konver-

gira. Da se ubrza konvergencija, upotrebljava se korigiranje više potencijala najednput. U programu koji se opisuje u ovom članku primijenjena je aditivna korekcija skupine potencijala koji se nalaze u četvrtastim dijelovima kako je skicirano na slici 4, prema [2]. Korekcija  $\Delta A$  iznosi

$$\Delta A = \frac{\sum I - \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell}}{\oint v \cdot d\ell}, \quad A_{nov} = A_{star} + \omega_i \cdot \Delta A \quad (10)$$

Put integracije je označen na slici 4. Zbroj svih struja



Slika 4. Skica četvrtastog područja i puta integracije za aditivnu korekciju potencijala

koje su obuhvaćene krivuljom preko koje se integrira iznosi  $\sum I$ . Umjesto integrala kod određivanja brojnika iz (10) upotrebljavaju se isti postupci kao za određivanje integrala iz (6). Faktor  $\omega_i$  je parametar koji se posebno zadaje.

Tokom rješavanja sustava (7) za svaki od tri postupka prema (8), (9), (10) posebno se određuje, hoće li se u pojedinoj iteraciji postupak primijeniti, i s kojim vrijednostima parametara  $\omega$ ,  $\omega_i$ ,  $F$ .

3. Neke svojstva programa. Zbog razmjerno male memorije (64 K bajtova) kompjutera koji je bio na raspolaganju broj nepoznanica čvorova iznosi do oko 1000. Svaki elementarni dio ima pridijeljen karakterističan broj kojim se zadaje, je li taj dio razdijeljen na dva trokutna dijela, i magnetsko svojstvo tog dijela. Taj broj je kretak cijeli broj (16 bitova).

Gustoća struje i reluktancija u elementarnom dijelu se može partiti jednim jednim kratkim dijelima brojeva zato jer je kod magnetskog materijala gustoća struje jednaka nuli.

Čitav se program sastoji od 4 neovisna dijela:

- 1) zadavanje podataka
- 2) iterativno korigiranje
- 3) ispisivanje tabela i štampanje slika
- 4) račun magnetskog napona  $\theta = \int_{(k)} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

Nakon dijela 2) rezultati iteracija se stavljaju na disk tako da se račun može prema potrebi nastavljati.

Nakon svake iteracije se ispisuju najzanimljiviji podaci: korekcije  $\Delta A$  i pripadne promjene indukcija, najveća prividna promjena indukcije zbog (9) i drugo.

Dio 3) poziva s diska podatke posljednje iteracije, ispisuje tražene tabele i štampa tražene slike silnice, reluktancije, indukcije i komponente indukcija. Određivanje znakova za te slike traje razmjerno dugo, pa se zato ovaj dio izvodi samo pred kraj proračuna.

Dio 4) računa magnetski napon  $\theta$  preko krivulje (k) koja se zađaže kao izlomljena krivulja pomoću indeksa onih čvorova kod kojih nastaju lomovi na krivulji.

4. Primjer. Opisani je program primijenjen kod proračuna djelovanja rupa za hladjenje u jarnu četveropolnog asinhronog motora. Dio jarna na jednom polnom koraku ( $90^\circ$ ) razdijeljen je na oko 1000 elementarnih dijelova. Zbog velike razlike u reluktanciji zraka i željeza svaka je rupa zaokruživana krivuljom za korekciju prema (10). Najbrže i najsigurnije se došlo do rezultata za  $\omega = 1$ ,  $\omega_z = 1$ , dakle bez ikakve nadrelaksacije! Kod  $\omega = 1,1$  dobiveni su neki put tako loši medjurezultati da je bilo najbolje da se račun prekine i ponovo počne ispočetka.  $F$  iz (9) iznosio je 10 ili 20. Dobiveni rezultati su provjereni pomoću proračuna magnetskog napona po raznim krivuljama. Odstupanja magnetskog napona za krivulje za koje bi taj napon morao biti jednak iznosila su najviše 6%, a to potpuno zadovoljava.

Trajanje jedne iteracije je oko 30 sekundi na kompjuteru IBM 360/40 uz 64 K bajtova po 8 bitova. Čitav račun traje ukupno oko 1,5 sata u najboljem slučaju. Na slici 5 prikazana je razdioba indukcije u dijelu od  $20^\circ$ .

5. Zaključak. Prikazani program omogućuje određivanje razdioba indukcije za dvoimenzionalne konfiguracije na području koje je sektor kružnog vijenca. Zasićenje magnetskog materijala se uzima u obzir. Elementarni dijelovi mogu biti četverokutni ili trokutni. Tokom računanja treba čovjek pratiti međurezultate i donositi odluke o novim parametrima za iteracije i o tome, je li račun završen. Ako je pristup kompjuteru moguć samo jedamput dnevno, rok izrade jednog većeg računa iznosi oko 5 dana. Najbolji bi bio interaktivni rad s kompjuterom.

Programom se dobivaju rezultati koji su neposredno potrebni za neke tehničke proračune. Direktno provjeravanje rezultata nije moguće, ali slike silnica i indukcije, te proračuni magnetskog napona po raznim krivuljama omogućuju da se ocijeni ispravnost rezultata.

#### L i t e r a t u r a

- [1] S.V. Ahamed, B.A. Erdelyi: Nonlinear Theory of Salient Pole Machines, IEE Transactions on Power App. and Syst. PAS 85, str. 61-70, January 1966.
- [2] F. de la Vallée-Poussin, A. Lion: Calcul itératif de l'induction magnétique dans les machines électriques, Revue générale de l'électricité, 731-739, avril 1967
- [3] I. Mendić: Izrada programa za proračun magnetskog polja u zoni zuba za digitalno računalo C 90-40, elaborat Elektrotehničkog instituta "R. Končar" E 32052, 1967.

