

Temperaturski impulsni odziv dvoslojne građevinske pregrade

Goran Todorović
Katedra za matematiku, fiziku i nacrtanu
geometriju
Građevinski fakultet Univerziteta u
Beogradu
Beograd, Srbija
todor@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0002-1195-4761

Milica Mirković Marjanović
Laboratorija za toplotnu tehniku i
zaštitu od požara, Institut za ispitivanje
materijala Beograd, Srbija
milica.mirkovic@institutims.rs ORCID
0000-0001-6023-8414

Radovan Gospavić Katedra za
Matematiku Fiziku i Nacrtanu
Geometriju, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu Beograd,
Srbija gospavic@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0002-4336-1813

Zorana Petojević Upravljanje
projektima u građevinarstvu,
Građevinski fakultet Univerziteta u
Beogradu Beograd, Srbija Zurich
University of Applied Sciences, School
of Architecture, Design, and Civil
Engineering, Toessfeldstrasse 11, 8401
Winterthur, Switzerland
zjovanovic@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0001-9555-598

Abstract—U radu je analizirana dvoslojna građevinska pregrada poznatih toplotnih i fizičkih karakteristika i određen je temperaturski impulsni odziv na zadate granične uslove na spoljašnjoj i unutrašnjoj površini. Odziv je određen rešavanjem Furijeove jednačine za zadati problem u frekventnom domenu. Temperaturski odziv u vremenskom domenu je dobijen određivanjem polova prenosne funkcije u frekventnom domenu.

Ključne reči—Furijeova jednačina, provođenje toplote, impulsni odziv.

I. UVOD

Oko trećine proizvedene energije u svetu se troši u oblasti građevinarstva [1], tako da politika uštede energije ima posebno važno mesto u ovoj oblasti. Problem uštede energije je veoma aktuelan imajući u vidu klimatske promene, koje vode ka globalnom otopljanju, topljenju ledenih pokrivača i narušavanju klime naše planete sa brojnim negativnim posledicama po ekonomiju i društvo. Standardi za proračun toplotnih performansi zgrada su bazirani na stacionarnim modelima toplotnog provođenja i transporta vlage [2]. Međutim, za praćenje i upravljanje toplotnim gubicima u realnom vremenu, potrebno je razvijati modele toplotnog transporta u nestacionarnom domenu.

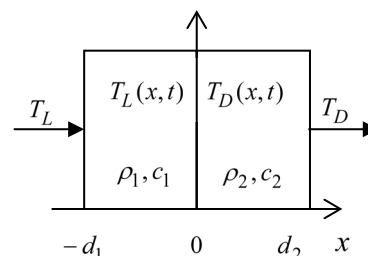
U ovom radu je sprovedena analiza jedne dvoslojne građevinske pregrade, sačinjene od jednog nosećeg i jednog termoizolacionog sloja. Analiza je urađena u frekventnom domenu, a rezultati su dati u vremenskom domenu, tj. izvedeni su izrazi za temperatursko polje u svakom od slojeva. Građevinska pregrada se posmatra kao linearni sistem i određen je njen impulsni odziv na Dirakovu pobudu temperaturom.

II. MODEL PROVOĐENJA TOPLOTE KROZ PREGRADU (ZID)

Provođenje toplote kroz homogenu pregradu u pravcu normale (x -ose) načinjeno od materijala specifične toplote c , toplotne provodnosti λ i gustine ρ je dato Furijeovom nestacionarnom jednačinom:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

gde su: $\alpha = \lambda / \rho c$ i $T(x,t)$ -temperatursko polje pregrade. Primenom (1) na dvoslojni zid na Sl. 1 imamo:



Sl. 1 Dvoslojna građevinska pregrada.

$$\frac{\partial^2 T_{L1}(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial T_{L1}(x,t)}{\partial t} = 0, \quad -d_1 \leq x \leq 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T_{D1}(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial T_{D1}(x,t)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq d_2, \quad (3)$$

uz granične uslove za temperature i toplotne fluxeve na površinama zida i $x = 0$,

$$T_{L1}(x = -d_1, t) = \delta(t), \quad T_{D1}(x = d_2, t) = 0, \quad (4)$$

$$T_{L1}(x = 0, t) = T_{D1}(x = 0, t), \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_{L1}(x = 0, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_{D1}(x = 0, t)}{\partial x}, \quad (6)$$

gde je $\delta(t)$ -Dirakova impulsna funkcija. U frekventnom domenu, (2) i (3) kao i granični uslovi (4), (5) i (6) glase:

$$\frac{\partial^2 T_{L1}(x,s)}{\partial x^2} - \alpha_1^2 s T_{L1}(x,s) = 0, \quad -d_1 \leq x \leq 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T_{D1}(x, s)}{\partial x^2} - \alpha_2^2 T_{D1}(x, s) = 0, \quad 0 \leq x \leq d_2, \quad (8)$$

$$T_{L1}(x = -d_1, s) = 1, \quad T_{D1}(x = d_2, s) = 0, \quad (9)$$

$$T_{L1}(x = 0, s) = T_{D1}(x = 0, s), \quad (10)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_{L1}(x = 0, s)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_{D1}(x = 0, s)}{\partial x}. \quad (11)$$

Opšte rešenje sistema jednačina (7) i (8) je:

$$T_{L1}(x, s) = A_1 e^{\alpha_1 \sqrt{s} x} + B_1 e^{-\alpha_1 \sqrt{s} x}, \quad (12)$$

$$T_{D1}(x, s) = A_2 e^{\alpha_2 \sqrt{s} x} + B_2 e^{-\alpha_2 \sqrt{s} x}. \quad (13)$$

Kompleksne koeficijente A_1 , A_2 , B_1 i B_2 možemo odrediti iz graničnih uslova (9), (10) i (11) za $T_{L1}(x, s)$ i $T_{D1}(x, s)$:

$$x = -d_1, \quad e^{-\alpha_1 d_1 \sqrt{s}} A_1 + e^{\alpha_1 d_1 \sqrt{s}} B_1 = 1, \quad (14)$$

$$x = 0, \quad A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad (15)$$

$$A_1 - B_1 = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1} (A_2 - B_2), \quad (16)$$

$$x = d_2, \quad e^{\alpha_2 d_2 \sqrt{s}} A_2 + e^{-\alpha_2 d_2 \sqrt{s}} B_2 = 0. \quad (17)$$

Rešenje sistema jednačina (14)-(17) glasi:

$$A_1 = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) - \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}))/2}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})}, \quad (18)$$

$$B_1 = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}))/2}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})}, \quad (19)$$

$$A_2 = \frac{-\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})(e^{2\alpha_2 d_2 \sqrt{s}} - 1) + \alpha_2 \lambda_2 sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})(e^{2\alpha_2 d_2 \sqrt{s}} + 1)}, \quad (20)$$

$$B_2 = \frac{\alpha_1 \lambda_1 e^{\alpha_2 d_2 \sqrt{s}}/2}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})}, \quad (21)$$

Potražimo rešenja (7) i (8) uz izmenjen granični uslov (9), tj.

$$T_{L1}(x = -d_1, s) = 0, \quad T_{D1}(x = d_2, s) = 1. \quad (22)$$

U ovom slučaju rešenja su:

$$T_{L2}(x, s) = C_1 e^{\alpha_1 \sqrt{s} x} + D_1 e^{-\alpha_1 \sqrt{s} x}, \quad (23)$$

$$T_{D2}(x, s) = C_2 e^{\alpha_2 \sqrt{s} x} + D_2 e^{-\alpha_2 \sqrt{s} x}. \quad (24)$$

Primenom graničnih uslova (22), (10) i (11) za koeficijente C_1 , D_1 , C_2 , D_2 dobijamo:

$$C_1 = \frac{\alpha_2 \lambda_2 e^{\alpha_1 d_1 \sqrt{s}}/2}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})}, \quad (25)$$

$$D_1 = \frac{-\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s})(e^{2\alpha_1 d_1 \sqrt{s}} + 1) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s})(e^{2\alpha_1 d_1 \sqrt{s}} - 1)} \quad (26)$$

$$C_2 = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}))/2}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})}, \quad (27)$$

$$D_2 = \frac{(\alpha_2 \lambda_2 sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) - \alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}))/2}{\alpha_1 \lambda_1 ch(\alpha_1 d_1 \sqrt{s}) sh(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) + \alpha_2 \lambda_2 ch(\alpha_2 d_2 \sqrt{s}) sh(\alpha_1 d_1 \sqrt{s})}. \quad (28)$$

Superpozicijom rešenja $T_{L1}(x, s)$, $T_{L2}(x, s)$ i rešenja $T_{D1}(x, s)$,

$T_{D2}(x, s)$ dobijamo temperaturna polja u slojevima u s domenu:

$$T_1(x, s) = T_{L1}(x, s) + T_{L2}(x, s) = A e^{\alpha_1 \sqrt{s} x} + B e^{-\alpha_1 \sqrt{s} x}, \quad (29)$$

$$T_2(x, s) = T_{D1}(x, s) + T_{D2}(x, s) = C e^{\alpha_2 \sqrt{s} x} + D e^{-\alpha_2 \sqrt{s} x}, \quad (30)$$

gde su, $A = A_1 + C_1$, $B = B_1 + D_1$, $C = A_2 + C_2$, $D = B_2 + D_2$.

Odgovarajući impulsni odzivi u vremenskom domenu se dobijaju primenom inverzne Laplasove transformacije uz poznavanje polova kompleksnih funkcija A, B, C i D. Ove funkcije predstavljaju Greenove funkcije (GF) za posmatranu planarnu strukturu. Pošto su kompleksne funkcije u imeniocima izraza za A, B, C i D transcendentne, nule ovih izraza, koje predstavljaju tražene polove, mogu se naći numeričkim putem. Analitičke izraze moguće je pronaći samo u slučaju jednoslojnog zida [3]. Broj polova je beskonačan i svi su realni i negativni, što garantuje da su GF uvek opadajuće funkcije u vremenu. Takođe, dodatnom analizom se može utvrditi da su GF i pozitivne funkcije vremena i prostorne koordinate [4]. Do istog zaključka se dolazi i fizičkom analizom samog procesa, jer posle početnog zagrevanja impulsnom pobudom, posmatrana struktura mora da se postepeno hladi. Temperaturna raspodela,

unutar posmatrane dvoslojne strukture u vremenskom domenu, dobija se linearnom kombinacijom konvolucionih integrala dobijenih GF i odgovarajućih temperaturskih varijacija vazduha sa unutrašnje i spoljašnje strane zida.

III. NUMERIČKO IZRAČUNAVANJE TEMPERATURSKOG POLJA

Model temperaturskog polja dobijen u prethodnom poglavlju ćemo primeniti na građevinski zid od betona i kamene vune, čije su fizičke i toplotne karakteristike date u Tabeli I:

TABELA I. TOPLOTNE I FIZIČKE KARAKTERISTIKE MATERIJALA ZIDOVA

	ρ [kg/m ³]	c [J/kgK]	λ [W/mK]	d [m]
beton	2100	960	2	0,3
kamena vuna	50	1000	0,04	0,12

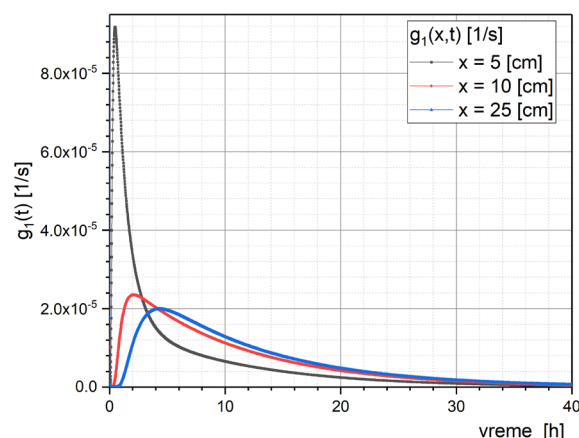
Razmatran je slučaj, koji odgovara temperaturskoj impulsnoj pobudi na spoljašnjim stranama zida, pri čemu su temperature zadate Dirakovim funkcijama. Polovi dobijenih temperaturskih raspodela u kompleksnom domenu su dobijeni numeričkim putem, dok su GF u vremenskom domenu dobijene korišćenjem inverzne Laplasove transformacije. Prva četiri pola su data u Tabeli II, kao i odgovarajuća karakteristična vremena. Karakteristična vremena su jednaka recipročnim vrednostima polova.

Na Sl. 2 je prikazana vremenska zavisnost GF za impulsnu temperatursku pobudu na površini zida sa leve strane (Sl. 1 sloj sa betonom) na mestima čije je rastojanje od leve površine zida jednako $x = 5, 10$ i 25 cm. Sa slike se vidi da su GF pozitivne i da usled impulsne pobude u početnom trenutku imaju nagli porast i da posle toga postepeno opadaju, odnosno uzorak se posle početnog temperaturskog porasta postepeno hladi. Takođe uočavamo da GF, koja je bliža levoj površini sa koje dolazi temperaturska pobuda, u početnim trenucima ima znatno veću vrednost od GF za pozicije koje su udaljenije od leve površine. Vrednost temperature zida u početnom trenutku je 0K.

TABELA II. PRVA ČETIRI POLA I KARAKTERISTIČNA VREMENA ZA POSMATRANU DVOSLOJNU STRUKTURU

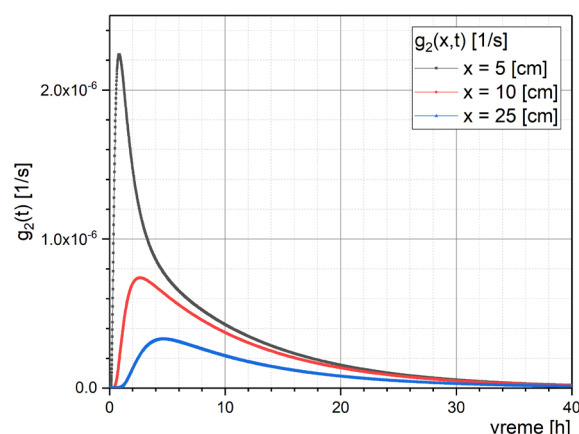
pol 10^{-4} [1/s]	-0,0789	-1,266	-4,43	-5,55
Kar. vreme [h]	35,2	2,19	0,627	0,51

Na Sl. 3 je prikazana vremenska zavisnost GF za impulsnu temperatursku pobudu u graničnom sloju vazduha sa desne strane zida (Sl. 1, sloj sa kamenom vunom) na mestima, čije je rastojanje od leve površine zida jednako $x = 25, 23$ i 21 cm. Sve tri tačke kao i u prethodnom slučaju se nalaze u sloju sa betonom. Za koeficijente prelaza toplote su usvojene iste vrednosti. U ovom slučaju, važi slična analiza, ali su vrednosti GF znatno manje, zbog toga što je sloj betonom toplotno izolovan sa desne strane, tako da termička pobuda sa te strane znatno manje prodire u sloj betona.



Sl. 2 Greenova funkcija $g_1(t)$ u vremenskom domenu za dvoslojnu građevinsku pregradu za različita rastojanja od leve površine zida: 5, 10 i 25 cm. Usvojeni su fizički parametri materijala iz Tabele 1.

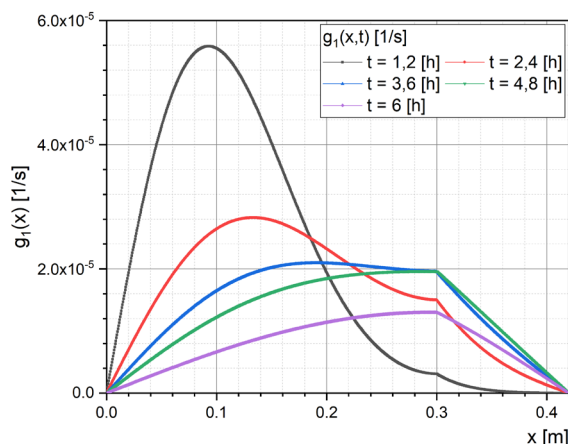
Na Sl. 4 je prikazana raspodela GF unutar posmatrane dvoslojne građevinske strukture za impulsnu temperatursku pobudu u graničnom sloju vazduha sa leve strane za različite vremenske trenutke. Sa slike se vidi da se “temperaturski impuls” postepeno difuziono prostire kroz celu strukturu, dok se u isto vreme cela struktura postepeno hladi. Sve GF na spoljašnjim površinama, u vremenskim trenucima $t > 0$, su jednake nuli, zbog toga što su temperature spoljašnjih površina identički jednake nuli posle prestanka dejstva impulsne pobude. Takođe uočavamo da je GF na razdvojnoj površini, na rastojanju 0,3 m od leve strane posmatrane strukture, neprekidna funkcija, dok su joj prvi izvodi na razdvojnoj površini prekidne funkcije. Ovo je posledica graničnih uslova na razdvojnoj površini između slojeva, koji su dati relacijama (5) i (6).



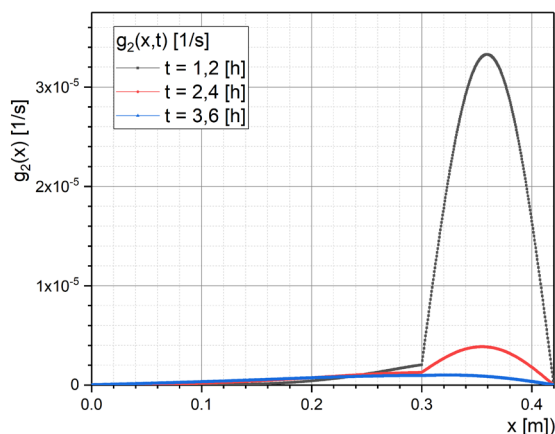
Sl. 3 Greenova funkcija $g_2(t)$ u vremenskom domenu za dvoslojnu građevinsku pregradu za različita rastojanja od leve površine zida: 25, 23 i 21 cm. Usvojeni su fizički parametri materijala iz Tabele 1.

Na slikama 5 i 6, prikazana je raspodela GF unutar posmatrane dvoslojne strukture u slučaju temperaturske impulsne pobude u graničnom sloju vazduha sa desne strane u različitim vremenskim trenucima. I za ovaj slučaj, važi slična analiza kao

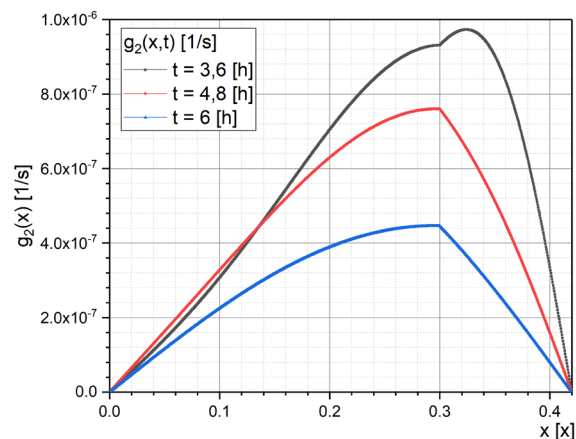
i u prethodnom. Takođe, se može uočiti da su nominalne vrednosti GF unutar zida za impulsnu pobudu sa desne strane zida, zbog prisustva termičke izolacije, znatno manje u odnosu na GF za slučaj pobude sa leve strane. I u ovom slučaju GF je neprekidna na razdvojnoj površini između slojeva.



Sl. 4 Greenova funkcije $g_1(x)$ unutar dvoslojne građevinske pregrade u različitim vremenskim trenucima. Usvojeni su fizički parametri materijala iz Tabele 1.



Sl. 5 Greenova funkcije $g_2(x)$ unutar dvoslojne građevinske pregrade u različitim vremenskim trenucima: 1,2[h], 2,4[h] i 3,6[h] od pobude. Usvojeni su fizički parametri materijala iz Tabele 1.



Sl. 6 Greenova funkcije $g_2(x)$ unutar dvoslojne građevinske pregrade u različitim vremenskim trenucima: 3,6[h], 4,8[h] i 6[h] od pobude. Usvojeni su fizički parametri materijala iz Tabele 1.

IV. ZAKLJUČAK

U radu je analizirano nestacionarno temperatursko polje jedne dvoslojne planarne građevinske pregrade. Rešavana je Furijeova jednačina nestacionarnog provođenja toplote kroz pregradu u frekventnom domenu, uz impulsnu temperatursku pobudu sa obe strane zida. Polovi kompleksnih Greenovih funkcija temperature su određeni numeričkim putem, a inverznom Laplacovom transformacijom temperaturska polja u vremenskom domenu. U radu su prikazane Greenove funkcije unutar zida na različitim mestima i u različitim trenucima.

LITERATURA

- [1] Key World Energy Statistics, International Energy Agency; 2015.
- [2] Pravilnik o energetskej efikasnosti zgrada, Službeni glasnik RS: 061/2011.
- [3] G.Todorović, "Dinamičke toplotne karakteristike homogenih građevinskih pregrada", Zbornik radova LXVIII nacionalne konferencije ETRAN, PS-TP112, Niš. 2024.
- [4] Todorović, G., Gospavić, R., "Fizičko modelovanje i in-situ merenja transporta toplote kroz višeslojne spoljašnje građevinske zidove", monografija, "Materijali i konstrukcije u savremenom građevinarstvu", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2022.

ABSTRACT

In this paper, a thermal impulse response of the partition with two layers was determined based on specified boundary conditions on the external and internal surfaces. The response was obtained by solving Fourier's equation for the given problem in both the frequency and time domains. Based on these solutions, the temperature fields of construction partitions were determined.

TEMPERATURE IMPULS RESPONSE OF THE TWO LAYERS BUILDING PARTITION

Goran Todorović, Radovan Gospavić, Zorana Petojević,
Milica Mirković Marjanović