

Modelovanje transporta toplote kroz višeslojne planarne strukture korišćenjem električnih analogija i analitičkih metoda u vremenskom i kompleksnom domenu

Radovan Gospavić, Katedra za
Matematiku, Fiziku i Nacrtnu
Geometriju, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu,
Beograd, Srbija
gospavic@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0002-4336-1813

Abstract— Razmatran je transport toplote kroz višeslojne planarne strukture sa proizvoljnim brojem slojeva u nestacionarnom slučaju. Pri analizi su korišćeni pristupi bazirani na električnim analogijama, odnosno ekvivalentnom RC kolu i analitički metod baziran na Green-ovim funkcijama. U vremenskom domenu je razmatran impulsni odziv na Dirac-ovu temperatursku pobudu na spoljašnjim površinama strukture. Dobijeni rezultati, korišćenjem dva različita metoda, su poređeni u vremenskom domenu pomoću odgovarajućih Green-ovih funkcija dobijenih analitičkim putem i analizom odgovarajućeg ekvivalentnog RC kola. U kompleksnom domenu, analizirani su kružni dijagrami, odnosno hodogrami prenosne funkcije sistema, dobijeni korišćenjem ekvivalentnog RC kola.

Ključne reči— *transport toplote, električne analogije, Green-ova funkcija, višeslojne planarne strukture, impulsni odziv*

I. UVOD

Analiza nestacionarnog transporta toplote i dufuzionih procesa u višeslojnim planarnim strukturama je od velikog značaja u mnogim inženjerskim i tehnološkim disciplinama [1]. Ovi procesi su intenzivno razmatrani i analizirani za višeslojne strukture planarne, cilindrične i sferne geometrije i imaju primenu u mnogim oblastima tehnologije, industrije, građevinarstva i elektrotehnike [2]. Pored toga, problemi iz ove oblasti su veoma aktuelni, imajući u vidu klimatske promene, kao i politiku energetske uštede i energetske efikasnosti [3]. Potrošnja energije u građevinskim objektima, zajedno sa enormnim porastom svetske populacije ima značajan uticaj na okolinu, ekonomiju i ukupan energetski sektor [4]. Termalne performanse višeslojnih struktura u termalnom omotaču stambenih objekata, imaju presudan uticaj na energetske efikasnost građevinskih objekata [5]. U realnim uslovima, pri analizi toplotnih performansi građevinskih objekata i termičkog omotača zgrada, neophodno je uzeti u obzir temperaturske varijacije okoline, odnosno analizu je neophodno sprovesti u nestacionarnom režimu [6]. Metode u analizi ovih procesa su generalno bazirane na analizi u vremenskom ili kompleksnom domenu. Pri analizi linearnih sistema u raznim oblastima nauke, tehnologije i inženjerskih disciplina, široko se koriste metodi bazirani na impulsnom odzivu (IO) ili Green-ovoj funkciji (GF) u vremenskom domenu. U posmatranom slučaju GF predstavlja temperaturski odziv na impulsnu pobudu, odnosno pobudu Dirac-ovom funkcijom, na spoljašnjim površinama posmatrane strukture.

Uvođenjem pogodnih transformacija za temperatursku raspodelu, primenom metoda razdvajanja promenljivih i rešavanjem odgovarajućeg svojstvenog problema, moguće je dobiti GF za višeslojnu planarnu strukturu u analitičkom obliku za proizvoljan broj slojeva i za različite granične uslove [6]. Temperaturska raspodela u posmatranoj strukturi, koja odgovara proizvoljnim temperaturskim varijacijama na spoljašnjim površinama, dobija se korišćenjem Duhamel-ovog principa i konvolucionog integrala GF i temperaturskih varijacija na spoljašnjim površinama [2,6,7]. Na ovaj način, GF u potpunosti opisuje termička svojstva posmatrane višeslojne strukture u nestacionarnom režimu. Sa druge strane, analiza u kompleksnom domenu se zasniva na primeni Laplace-ove ili Fourier-ove transformacije. U ovom slučaju, dobijaju se temperaturske raspodele unutar posmatrane strukture koje predstavljaju odzive na prosto-periodične temperaturske varijacije, na određenim frekvencijama, na spoljašnjim površinama posmatrane strukture [8]. Međunarodni standard ISO 13786 [9], u potpunosti opisuje transport toplote kroz višeslojnu planarnu strukturu u ustaljenom prosto-periodičnom režimu, korišćenjem transfer funkcija TF u frekventnom domenu. Nedostatak ovog pristupa se sastoji u tome, što se dobijene TF ne mogu direktno konvertovati u vremenski domen u pogodnom analitičkom obliku. U analizi se koriste i metodi bazirani na kondukcijom transfer funkcijama (Conduction Transfer Functions CTF), kojima se znatno ubrzava konvergencija dobijenih numeričkih rešenja za temperatursku raspodelu [10]. Ovaj metod je veoma pogodan za proračun i procenu temperaturske raspodele i toplotnih flukseva u višeslojnoj strukturi u nestacionarnim uslovima uz direktno korišćenje temperaturskih merenja vazduha, u diskretnim vremenskim trenucima, na spoljašnjim površinama posmatrane strukture [10, 11]. CTF zavise samo od geometrijskih, fizičkih i termalnih parametara posmatrane strukture i u potpunosti opisuju transfer toplote, kroz posmatranu strukturu u nestacionarnom slučaju [11].

U ovom radu, analiziran je transfer toplote kroz višeslojnu građevinsku pregradu u nestacionarnom režimu korišćenjem električnih analogija i odgovarajućeg RC kola [12,13]. Analiza je sprovedena u kompleksnom domenu i dobijene su kompleksne transfer funkcije za temperatursku raspodelu u posmatranoj strukturi. Korišćeni su granični uslovi mešovito tipa (Robin-ovi granični uslovi), koji uključuju temperaturske

varijacije vazduha na spoljašnjim površinama razmetrane pregrade. Korišćenjem inverzne Laplace-ove transformacije dobijene su GF u vremenskom domenu. Dobijeni rezultati su poređeni sa numeričkim rezultatima dobijenim korišćenjem analitičkih izraza za GF.

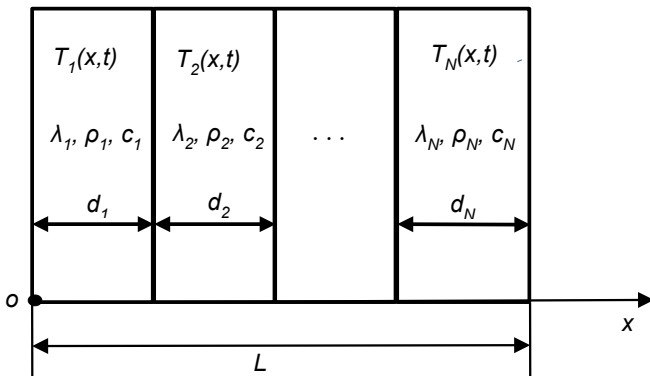
II. MODEL PROVOĐENJA TOPLOTE KROZ PREGRADU (ZID)

Nestacionarno provođenje toplote kroz višeslojnu planarnu strukturu se modeluje vremenski zavisnom parcijalnom diferencijalnom jednačinom drugog reda, (Fourier-ovom jednačinom) uz odgovarajuće granične i početne uslove, koja je data sledećom relacijom:

$$\frac{\partial T_n(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda_n}{\rho_n c_n} \cdot \frac{\partial^2 T_n(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1, 2, \dots, N;$$

gde su T_n , ρ_n , λ_n i c_n temperatura [K], gustina [kg/m³], termička provodnost [W/m·K] i specifična toplota materijala [J/kg·K] u n -tom sloju respektivno, dok je sa t [s] označeno vreme. Gornja relacija opisuje transport toplote u n -tom sloju. Takođe je pretpostavljeno da su svi termički i fizički parametri materijala u svakom sloju konstantni, odnosno da je cela struktura homogen sloj po sloj. Šematski prikaz razmatrane višeslojne strukture sa geometrijskim dimenzijama, fizičkim parametrima temperaturnim raspodelama u pojedinim slojevima i orijentacijom koordinatnog sistema je prikazan na Slici 1. U daljim razmatranjima, pretpostavićemo da se leva i desna površina višeslojne pregrade na Slici 1 nalaze sa unutrašnje i spoljašnje strane, respektivno. Provođenje toplote se odvija isključivo u pravcu x ose.



Sl. 1 Višeslojni pregradni zid, sa geometrijskim dimenzijama, fizičkim parametrima i temperaturnim raspodelama u pojedinim slojevima

Unutar same strukture i na spoljašnjim površinama su usvojeni sledeći početni i granični uslovi, respektivno:

$$T_n(x, t = 0) = T_0(x), x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1, 2, \dots, N$$

$$\alpha_1 \cdot (T_u(t) - T_1(x, t)|_{x=0}) = -\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (2)$$

$$\alpha_2 \cdot (T_n(x, t)|_{x=L} - T_s(t)) = -\lambda_N \cdot \frac{\partial T_N(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L},$$

gde su: $T_0(x)$ temperaturna raspodela u početnom trenutku $t=0$, $T_u(t)$ i $T_s(t)$ temperaturske varijacije vazduha u graničnom sloju sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade, redom. Parametri α_1 i α_2 [W/m²·K] predstavljaju koeficijente prelaza toplote u graničnim slojevima sa unutrašnje i spoljašnje strane

pregrade, respektivno. Na osnovu nacionalnog standarda SRPS EN ISO 6946, za numeričke vrednosti ovih parametara sa unutrašnje i spoljašnje strane su usvojene vrednosti od 7,69 i 25 [W/m²·K], respektivno. Ako su termalni kontakti između pojedinih slojeva u posmatranoj strukturi idealni temperature i termički fluksevi na spojevima između pojedinih materijala su jednaki. U tom slučaju na kontaktu između n -tog i $n+1$ -og sloja važe sledeće relacije:

$$T_n(x, t)|_{x=x_n} = T_{n+1}(x, t)|_{x=x_n},$$

$$\lambda_n \cdot \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_n} = \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial T_{n+1}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_n}. \quad (3)$$

GF za problem definisan relacijom (1)-(3) predstavljaju odzive na temperaturske pobude date Dirac-ovom funkcijom (impulsna pobuda) u graničnom sloju sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade. Za gornji problem GF, su date sledećim analitičkim izrazima [8]:

$$g_1(x, t) = \Delta_1(x) \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot w_{1,i} \cdot \phi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 \cdot t}$$

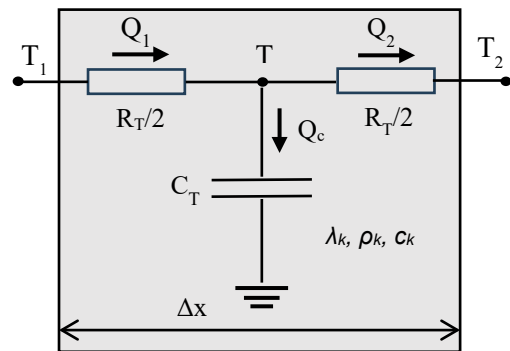
$$g_2(x, t) = \Delta_2(x) \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot w_{2,i} \cdot \phi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 \cdot t}, \quad (4)$$

gde su g_1 i g_2 GF koje odgovaraju impulsnoj pobudi sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade respektivno, $\delta(t)$ je Dirac-ova delta funkcija, β_i i ϕ_i su svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije, respektivno, dobijene rešavanjem odgovarajućeg svojstvenog problema (Sturm-Liouville-ovog problem). Veličine $\Delta_{1,2}$ i $w_{1,2,i}$ su date sledećim relacijama [8]:

$$\Delta_{1,2}(x) = f_{1,2}(x) - \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot w_{1,2,i}$$

$$w_{1,2,i} = \langle f_{1,2}, \phi_i \rangle = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_{1,2}(y) \rho_n c_n \phi_i(y) dy, \quad (5)$$

gde su $f_{1,2}(x)$ pomoćne funkcije, dok veličine $w_{1,2,i}$ predstavljaju Fourier-ove koeficijente u razvoju pomoćnih funkcija po svojstvenim funkcijama ϕ_i . Provođenje toplote kroz tanki sloj unutar k -tog sloja materijala debljine Δx moguće je modelovati ekvivalentnim RC kolom korišćenjem električnih analogija za temperaturu i termički fluks, što je šematski prikazano na Slici 2 [14, 15].



Sl. 2 Šematski prikaz ekvivalentnog RC kola za tanki sloj koji se nalazi u k -tom sloju materijala debljine Δx dobijen korišćenjem električne analogije za temperaturu i termički fluks

Termički i fizički parametri materijala k -tog sloja unutar koga se nalazi tanki sloj, termička provodnost, gustina i specifična toplota, su na slici označeni sa λ_k , ρ_k , c_k respektivno. Provođenje toplote u posmatranom sloju može da se modeluje sledećim relacijama [14, 15]:

$$Q_c = S \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = Q_1 - Q_2;$$

$$Q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S \approx \frac{T_1 - T}{\frac{R_T}{2}}; Q_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S \approx \frac{T - T_2}{\frac{R_T}{2}}; \quad (6)$$

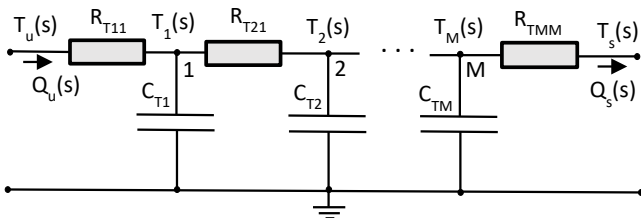
$$C_T \frac{dT}{dt} = Q_1 - Q_2 = Q_c;$$

gde su Q_1 i Q_2 toplotni fluksevi sa leve i desne strane posmatranog sloja, Q_c je razlika flukseva Q_1 i Q_2 , toplotni fluks Q_c odgovara toploti u jedinici vremena kojom se posmatrani sloj zagreva ili hlad. Temperature T_1 , T_2 i T su temperature neposredno sa leve i desne strane i u sredini posmatranog tankog sloja respektivno. Veličine R_T [K/W] i C_T [J/K] su termalna otpornost i termalna kapacitivnost posmatranog tankog sloja i date su sledećom relacijom [14, 15]:

$$R_T = \frac{\Delta x}{\lambda_k \cdot S}; C_T = S \cdot \rho_k \cdot c_k \cdot \Delta x, \quad (7)$$

gde je S je površina poprečnog preseka pregrade. Potrebno je napomenuti da ova veličina figuriše i na levoj i na desnoj strani u prvoj i zadnjoj relaciji u (6), tako da njena brojna vrednost ne utiče na rezultate analize i može se usvojiti da je $S = 1 \text{ m}^2$.

Zadnja relacija u (6) je analogna relaciji koja opisuje punjenje i pražnjenje kondenzatora kapacitivnosti C_T . Na ovaj način je moguće uspostaviti analogiju između provođenja toplote u tankom sloju i električnog RC kola, gde temperatura odgovara električnom naponu, a termički fluks električnoj struji. Treba napomenuti da je termička otpornost celog tankog sloja, podeljena na dva jednaka dela i da su otpornosti $R_T/2$ postavljene simetrično u odnosu na kondenzator C_T . Shodno gornjim razmatranjima, cela višeslojna struktura pregradnog zida, može da se izdela na niz od M tankih slojeva i na taj način se formira ekvivalentno RC kolo, prikazano na Slici 3, kojim se modeluje transport toplote u posmatranom zidu.



Sl. 3 Ekvivalentno RC kolo, kojim se modeluje transport toplote kroz višeslojnu pregradu

Sve veličine prikazane na gornjoj slici su izražene u kompleksnom domenu primenom Laplace-ove transformacije. Temperature $T_u(s)$ i $T_s(s)$ su temperature vazduha u graničnom sloju sa unutrašnje i spoljašnje strane, respektivno i one predstavljaju spoljašnje pobude, dok veličine $Q_u(s)$ i $Q_s(s)$ predstavljaju termičke flukseve na unutrašnjoj i spoljašnjoj površini zida respektivno.

Svatom tankom sloju, odgovara jedan RC element prikazan na Slici 2, tako da je broj kondenzatora u ekvivalentnom kolu jednak broju tankih slojeva. Kondenzatori u posmatranom RC kolu, brojno su ekvivalentni termalnim kapacitivnostima pojedinih tankih slojeva. Čvorovi $1, 2, \dots, M$ u ekvivalentnom RC kolu sa Slike 3, u kojima su vezani kondenzatori ekvivalentni su tačkama u sredini tankih slojeva, tako da

električni naponi u čvorovima ekvivalentnog RC kola odgovaraju temperaturama u tačkama, čije se x-koordinate nalaze na sredini odgovarajućeg tankog sloja. Ove temperature na slici 3 su označene sa $T_1(s)$, ..., $T_M(s)$. Termičke otpornosti između pojedinih kapacitivnosti u ekvivalentnom RC kolu, brojno su jednake zbiru termičkih otpornosti iz susednih RC elemenata, tako da važe sledeće relacije:

$$R_{T11} = \frac{R_{T1}}{2} + R_{T\alpha 1}; R_{T12} = \frac{R_{T2}}{2} + \frac{R_{T1}}{2}; \dots;$$

$$R_{TMM} = \frac{R_{TM}}{2} + R_{T\alpha 2}; R_{T\alpha 1,2} = \frac{1}{\alpha_{1,2} \cdot S}, \quad (8)$$

gde su $R_{T\alpha 1,2}$ termalne otpornosti koje odgovaraju graničnim slojevima vazduha sa desne i leve strane posmatrane strukture respektivno. Debljine pojedinih tankih slojeva, određuju prostornu diskretizaciju posmatrane strukture i u opštem slučaju ova diskretizacija nije uniformna. Primenom metoda potencijala čvorova, dobija se sledeći sistem od M linearnih jednačina po M nepoznatih temperatura $T_1(s)$, ..., $T_M(s)$ u kompleksnom domenu koji uključuje početne uslove i pobude:

$$\mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = \mathbf{B}(s), \quad (9)$$

gde su vektori $\mathbf{T}(s)$ i $\mathbf{B}(s)$ dati sledećim relacijama:

$$\mathbf{T}(s) = [T_1(s), \dots, T_M(s)]^T$$

$$\mathbf{B}(s) = [T_u(s) + \tau_1 \cdot T_1(0^+), \tau_2 \cdot T_2(0^+), \dots, T_s(s) + \tau_M \cdot T_M(0^+)]^T,$$

$$\tau_1 = R_{T11} \cdot C_{T1}, \tau_2 = R_{T23} \cdot C_{T2}, \dots, \tau_M = R_{TMM} \cdot C_{TM} \quad (10)$$

gde su $T_1(0^+)$, ..., $T_M(0^+)$ početne temperature u trenucima $t=0^+$, u vremenskom domenu, u svakom od čvorova ekvivalentnog RC kola i $\tau_1, \dots, \tau_M$ su vremenske konstante za odgovarajuće tanke slojeve. Matrica $\mathbf{A}(s)$, dimenzija $M \times M$, je funkcija kompleksne varijable s i data je sledećim izrazom:

$$\begin{bmatrix} 1 + k_1 + \tau_1 \cdot s & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 1 + k_2 + \tau_2 \cdot s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -k_{M-1} & 1 + k_{M-1} + \tau_{M-1} \cdot s & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -k_M & 1 + k_M + \tau_M \cdot s \end{bmatrix}, \quad (11)$$

gde su konstante $k_1, \dots, k_M$ date sledećim relacijama:

$$k_1 = \frac{R_{T11}}{R_{T12}}, k_1 = \frac{R_{T23}}{R_{T12}}, \dots, k_M = \frac{R_{TMM}}{R_{TM-1M}}. \quad (12)$$

Rešavajući linearni sistem dat relacijom (9), dobijaju se nepoznate temperature $\mathbf{T}(s)$ u kompleksnom domenu. U opštem slučaju, primenom inverzna Laplace-ove transformacije dobijaju se nepoznate temperature u vremenskom domenu, date sledećom formalnom relacijom.

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{T}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{A}^{-1}(s) \cdot \mathbf{B}(s)\}, \quad (13)$$

$$\mathbf{T}(t) = [T_1(t), \dots, T_M(t)]^T,$$

gde su $T_1(t)$, ..., $T_M(t)$ temperature u vremenskom domenu u čvorovima $1, 2, \dots, M$ ekvivalentnog RC kola sa slike 3. U rešenju, za temperatursku raspodelu u vremenskom domenu, datom izrazom (13) uključeni su i početni uslovi (temperaturska raspodela u početnom trenutku) i spoljašnje

pobude, odnosno temperaturske varijacije vazduha u graničnom sloju na spoljašnjim površinama zida.

Da bismo dobili GF za posmatrano ekvivalentno RC kolo potrebno je usvojiti da su sve početne vrednosti temperature $T_1(0^+), \dots, T_M(0^+)$ jednake nuli, kao i da je jedna od pobuda jednaka Dirac-ovoj delta funkciji (jednaka 1 u kompleksnom domenu), a druga pobuda jednaka nuli. Na taj način, za svaki čvor ekvivalentnog RC kola, dobijamo dve GF, $g_1(x_j, t)$ i $g_2(x_j, t)$ koje korespondiraju impulsnim pobudama sa unutrašnje i spoljašnje strane zida, respektivno. Pri tome prostorne koordinate x_j ($j=1, 2, \dots, M$), odgovaraju čvorovima $1, 2, \dots, M$ ekvivalentnog RC kola. GF $g_{1,2}$, date su sledećim relacijama:

$$\begin{aligned} g_1(x_j, t) &= \sum_{i=1}^M \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \cdot \frac{C_{j1}(s_i)}{\det A(s)} \cdot \exp(s_i \cdot t), \\ g_2(x_j, t) &= \sum_{i=1}^M \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \cdot \frac{C_{jM}(s_i)}{\det A(s)} \cdot \exp(s_i \cdot t), \end{aligned} \quad (14)$$

gde su kompleksne funkcije C_{ij} kofaktori matrice $A(s)$, s_i su nule determinante matrice $A(s)$ odnosno polovi prenosne funkcije posmatranog sistema. Može da se pokaže da su za sve fizički realne vrednosti parametara posmatrane strukture, svi polovi prosti, realni i manji od nule [8]. GF date gornjim relacijama su ekvivalentne GF datim relacijama u (4), koje su dobijene analitičkim rešavanjem polaznog problema datog relacijama (1)-(3). Za proizvoljne temperaturske varijacije vazduha u graničnom sloju, temperaturska raspodela unutar posmatrane višeslojne strukture se dobija primenom GF i konvolucionog integrala [8].

III. NUMERIČKI REZULTATI

Razmatran je četvoroslojni zid, koji se nalazi u termalnom omotaču zgrade, čije su dimenzije toplotne i fizičke karakteristike date u Tabeli I. U poslednjoj koloni Tabele I je dat broj RC elemenata, koji je korišćen za svaki sloj posmatranog zida, ukupan broj elemenata je 27. Debljina tankih slojeva, koji odgovaraju RC elementima unutar svakog materijala, je bila uniformna. Prvi sloj posmatrane strukture se nalaza sa unutrašnje strane objekta. Ukupna debljina posmatrane strukture je 0,36 [m].

TABELA I. DIMENZIJE, TOPLLOTNE I FIZIČKE KARAKTERISTIKE ČETVOROSLOJNOG FASADNOG ZIDA

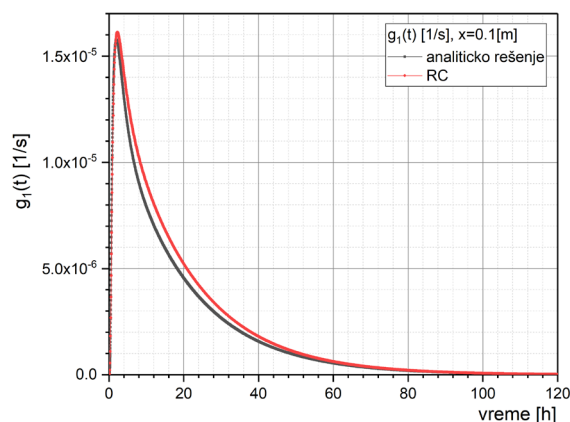
	materijal	d[cm]	ρ [kg/m ³]	λ [W/m·K]	c[J/kgK]	RC
1	zaštitni sloj	2	1900	0,7	1090	2
2	Opeka	20	1400	0,61	920	15
3	izolacija	12	90	0,041	1260	8
4	zaštitni sloj	2	1900	0,7	1050	2

Razmatrani linearni sistem u kompleksnom domenu je bio dimezija 27×27 , u Tabeli II je prikazano prvih pet polova sistema sa odgovarajućim karakterističnim vremenima, koje predstavljaju recipročne vrednosti polova.

TABELA II. PRVIH PET POLOVA I KARAKTERISTIČNA VREMENA ZA POSMATRANU ČETVOROSLOJNU STRUKTURU

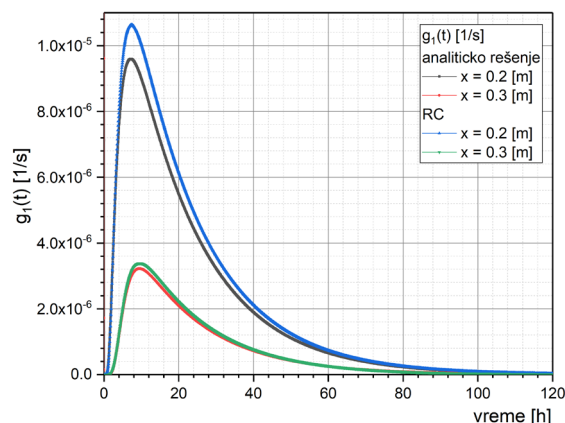
	1	2	3	4	5
Pol 10^{-4} [1/s]	-0,147	-1,255	-2,278	-3,979	-5,02
Karakter. vreme [h]	18,8	2,211	1,21	0,69	0,552

Na Slici 4 su prikazane vremenske zavisnosti GF $g_1(x, t)$ dobijene analitički korišćenjem relacije (4) korišćenjem relacije (14) za ekvivalentno RC kolo za vrednost prostorne koordinate $x=0,1$ [m] što odgovara devetom čvoru u ekvivalentnom RC kolu.



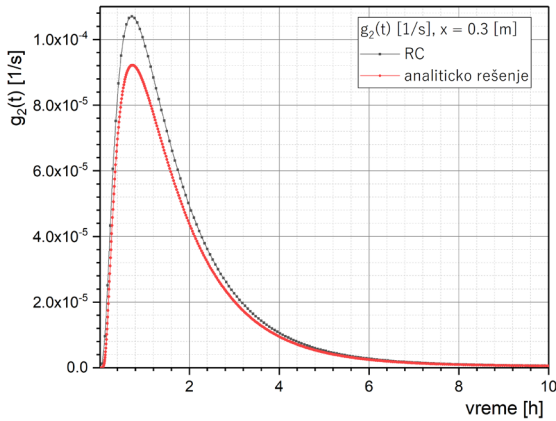
Sl. 4 Vremenska zavisnost GF $g_1(x, t)$ dobijene analitički i korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednost prostorne koordinate $x=0,1$ [m] što odgovara devetom čvoru u RC kolu.

Na Slici 5 prikazane su vremenske zavisnosti GF $g_1(x, t)$ dobijene analitički i na osnovu ekvivalentnog RC kola za vrednosti prostornih koordinata 0,2 i 0,3 [m] što odgovara 17. i 23. čvoru u RC kolu.



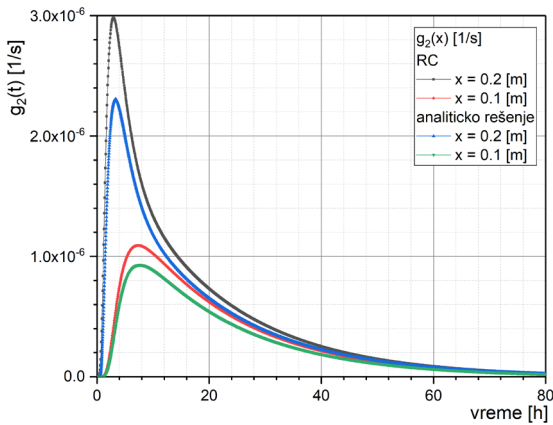
Sl. 5 Vremenska zavisnost GF $g_1(x, t)$ dobijene analitički i korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednosti prostornih koordinate 0,2 i 0,3 [m] što odgovara 17. i 23. čvoru u RC kolu.

U gornjim slučajevima, pobuda se nalazila sa unutrašnje strane posmatrane strukture, odnosno $T_u(s)=1$ i $T_s(s)=0$. Sa gornjih slika se vidi da je odstupanje GF dobijenih korišćenjem ekvivalentnog RC od odgovarajućih analitičkih GF manje za veća rastojanja od pobude. Na Slici 6 prikazane su vremenske zavisnosti GF $g_2(x, t)$ dobijene analitički i na osnovu ekvivalentnog RC kola za vrednost prostorne koordinate 0,3 [m].



Sl. 6 Vremenska zavisnost GF $g_2(x,t)$ dobijene analitički i korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednost prostorne koordinate 0,3 [m]

Na Slici 7 prikazane su vremenske zavisnosti GF $g_2(x,t)$ dobijene analitički i na osnovu ekvivalentnog RC kola za vrednost prostorne koordinate 0,2 i 0,1 [m].



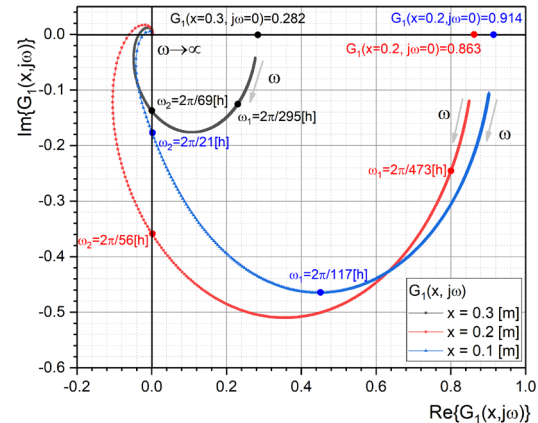
Sl. 7 Vremenska zavisnost GF $g_2(x,t)$ dobijene analitički i korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednost prostorne koordinate 0,2 i 0,1 [m]

U gornjim slučajevima, pobuda se nalazila sa unutrašnje strane posmatrane strukture odnosno $T_u(s)=0$ i $T_s(s)=1$. GF u kompleksnom, domenu ili prenosne funkcije PF za ekvivalentno RC kolo dobijaju se direktnim rešavanjem linearnog sistema datog sa (9), uz odgovarajuće granične i početne uslove, i date su sledećim relacijama:

$$G_1(x_j, s) = \frac{C_{j1}(s)}{\det A(s)}, \quad G_2(x_j, s) = \frac{C_{jM}(s)}{\det A(s)}. \quad (15)$$

Na Slici 8, prikazan je hodograf ili kružni dijagram za PF $G_1(x_j, s)$ sa kružnom frekvencijom kao promenljivim parametrom. Kompleksne vrednosti PF su dobijene za različite vrednosti kružne frekvencije u intervalu $[0, +\infty]$, odnosno u relaciji 15 je izvršena zamena $s \rightarrow j\omega$. Ove vrednosti su prikazane u kompleksnoj ravni, gde su na ordinati i apscisi prikazane realne i kompleksne vrednosti PF

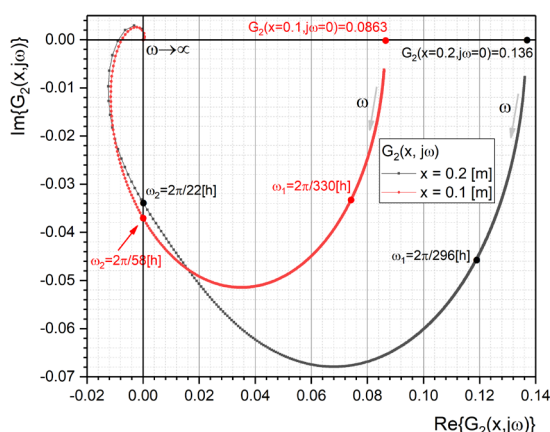
respektivno, za različite vrednosti koordinate x unutar posmatranog zida.



Sl. 8 Kružni dijagrami ili hodografi $G_1(x,t)$ sa kružnom frekvencijom kao promenljivim parametrom dobijeni korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednosti prostornih koordinata 0,1 i 0,2 i 0,3 [m]

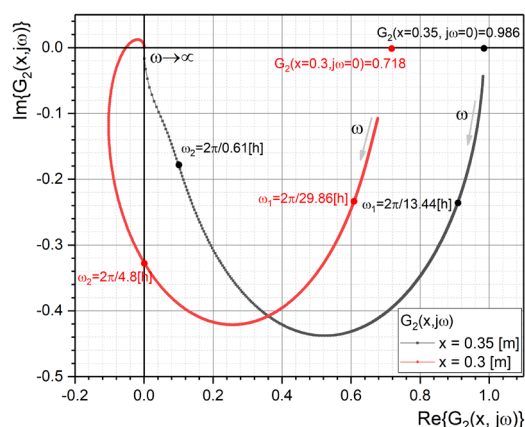
Realni i imaginarni deo PF su parne i neparne funkcije od kružne frekvencije, respektivno, tako da je ovakav kružni dijagram uvek simetričan u odnosu na realnu osu. Na gornjoj slici je radi preglednosti, prikazan samo donji deo dijagrama ($\omega > 0$). Za $\omega=0$ sve PF za posmatranu strukturu opisuju temperatursku raspodelu u stacionarnom režimu. U ovom slučaju PF su realne, pozitivne i manje od jedan, na gornjoj slici su prikazane odgovarajućim tačkama, ovo znači da PF za $\omega=0$ presecaju realnu osu u intervalu $[0,1]$. Brojne vrednosti PF $G_1(x_j, j\omega=0)$, predstavljaju temperatursku raspodelu unutar posmatrane višeslojne strukture u stacionarnom režimu kada su temperature vazduha u graničnom sloju sa unutrašnje i spoljašnje strane zida jednake 1[K] i 0 [K] respektivno. Analogna analiza važi i za $G_2(x_j, 0)$. Na gornjoj slici, na kružnim dijagramima su prikazane i tačke sa korespondentnim brojnim vrednostima kružne frekvencije. Pred toga, sa slike se vidi da su moduli PF za sve vrednosti kružne frekvencije uvek manje od jedan kao i da teže nuli kada $\omega \rightarrow +\infty$ ovo je posledica termičke inercije sistema odnosno struktura nije u stanju da prati brze temperaturske varijacije. Do istog zaključka se dolazi i analizom RC kola sa Slike 3. na visokim frekvencijama sve termičke kapacitivnosti postaju „kratki spojevi“ i shodno tome, sve temperature u čvorovima RC kola su jednake nuli.

Na Slici 9 su prikazani kružni dijagrami PF $G_2(x_j, j\omega)$ za vrednosti prostorne koordinate 0,1 i 0,2 [m], dok su na Slici 10 prikazani kružni dijagrami PF za vrednosti prostorne koordinate 0,3 i 0,35. Gornja analiza za kružne dijagrame PF G_1 u potpunosti važi i za, odgovarajuće dijagrame PF G_2 , koji su prikazani na donjim Slikama.



Sl. 9 Kružni dijagrami ili hodografi $G_2(x,t)$ sa kružnom frekvencijom kao promenljivim parametrom dobijeni korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednosti prostornih koordinata 0,1 i 0,2 [m]

Struktura kružnih dijagrama PF $G_{1,2}$ u okolini koordinatnog početka u kompleksnoj ravni kada $\omega \rightarrow +\infty$ na osnovu principa argumenta zavisi od razlike broja nula kofaktora $C_{JL}(s)$ i $C_{JM}(s)$ datih relacijama (14) i broja nula determinante matrice $A(s)$, odnosno broj obilazaka kružnog dijagrama oko koordinatnog početka u kompleksnoj ravni je jednak ovoj razlici. Ova struktura, nije detaljno prikazana na gornjim slikama zbog preglednosti. Pored toga, u našem slučaju ona i nije od praktičnog interesa zbog toga što u toj oblasti moduli PF teže nuli i doprinos komponenti temperaturskih varijacija na visokim frekvencijama ukupnoj temperaturskoj raspodeli u posmatranoj strukturi je zanemarljiv.



Sl. 10 Kružni dijagrami ili hodografi $G_2(x,t)$ sa kružnom frekvencijom kao promenljivim parametrom dobijeni korišćenjem ekvivalentnog RC kola, za vrednosti prostornih koordinata 0,3 [m]

IV. ZAKLJUČAK

U radu je predstavljen i analiziran model transporta toplote kroz višeslojnu planarnu strukturu koji uključuje i prelaz toplote u graničnom sloju, baziran na električnoj analogiji i ekvivalentnom RC kolu. Ekvivalentno RC kolo je analizirano u kompleksnom domenu i dobijene su PF, koje predstavljaju

odzive na impulsne temperaturske pobude Dirac-ovom funkcijom u graničnom sloju. Primenom inverzne Laplace-ove transformacije dobijene su GF za posmatrano ekvivalentno RC kolo u vremenskom domenu. Ovi rezultati su poređeni sa odgovarajućim GF dobijenim analitičkim putem, za četvoroslojni fasadni zid, na različitim mestima u posmatranoj strukturi. Pred toga, analizirani su i hodografi ili kružni dijagrami PF u frekventnom domenu u intervalu $[0, +\infty]$ za isti zid. Pokazano je da su amplitude PF na svim frekvencijama manje od jedan kao i da kružni dijagrami za nultu kružnu frekvencijama presecaju realnu osu u intervalu $[0,1]$. Ove vrednosti, kao funkcije prostorne koordinate, predstavljaju temperaturske raspodele unutar posmatrane strukture u stacionarnom režimu za jedinične vrednosti temperature vazduha u graničnom sloju.

LITERATURA

- [1] Jia-meng Tian, Bin Chen, Zhi-fu Zhou, Methodology of surface heat flux estimation for 2D multi-layer mediums, *Int. J. Heat Mass Tran.* 114 (2017) 675–687 <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.06.053>.
- [2] M.N. Ozisik, *Heat Conduction*, second ed., John Wiley & Sons, United States, 1993.
- [3] Key World Energy Statistics, International Energy Agency; 2015.
- [4] Directive 2012/27/EU of the European Parliament and of the Council of 25 on energy efficiency, European Parliament, Directive; 2012.
- [5] G. Oliveti, N. Arcuri, D. Mazzeo, M. De Simone, A new parameter for the dynamic analysis of building walls using the harmonic method, *International Journal of Thermal Sciences* 88 (2015) 96–109, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.006>
- [6] Milica Mirković Marjanović, Radovan Gospavić, Goran Todorović, An analytical approach based on Green's function to thermal response factors for composite planar structure with experimental validation, *International Journal of Thermal Sciences* 139 (2019) 129–143, <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.01.020>
- [7] Zorana Petojević, Radovan Gospavić, Goran Todorović, Estimation of thermal impulse response of a multi-layer building wall through in-situ experimental measurements in a dynamic regime with applications, *Applied Energy* 228 (2018) 468–486, <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.06.083>
- [8] G. Todorović, R. Gospavić, Fizičko modelovanje i in-situ merenja transporta toplote kroz višeslojne spoljašnje građevinske zidove, Materijali i konstrukcije u savremenom građevinarstvu- monografija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, pp. 151–173, 2022. <https://grafar.grf.bg.ac.rs/handle/123456789/3050>
- [9] Thermal performance of building components: dynamic thermal characteristics and calculation methods, ISO 13786; 2007.
- [10] Luo C, Moghtaderi B, Page A. Modelling of wall heat transfer using modified conduction transfer function, finite volume and complex Fourier analysis methods. *Energy Build* 2010;42:605–17. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enbuild.2009.10.031>.
- [11] Li Xiang Qian, Youming Chen JD, Spitler D Fisher. Applicability of calculation methods for conduction transfer function of building constructions. *Int J Therm Sci* 2009;48:1441–51. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2008.11.006>.
- [12] J. Duan, N. Li, J. Peng, C. Wang, Q. Liu, Full-response model of transient heat transfer of building walls using thermoelectric analogy method, *J. Build. Eng.*, vol 46, 103717, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.job.2021.103717>.
- [13] G. Fraisse, C. Viardot, O. Lafabrie, G. Achard, Development of a simplified and accurate building model based on electrical analogy, *Energy Build.* vol 34, Issue 10, pp. 1017–1031, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0378-7788\(02\)00019-1](https://doi.org/10.1016/S0378-7788(02)00019-1).
- [14] B. Ravelo, L. Rajaoarisoa, O. Maurice, Thermal modelling of multilayer walls for building retrofitting applications, *J. Build. Eng.*, vol 29, 101126, 2020.

- [15] J. Duan, N. Li, J. Peng, C. Wang, Q. Liu, Full-response model of transient heat transfer of building walls using thermoelectric analogy method, *J. Build. Eng.*, vol 46, 103717, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2021.103717>.

ABSTRACT

Heat transport through multilayer planar structures with an arbitrary number of layers in the non-stationary case is considered. The analysis uses approaches based on electrical analogies, i.e. equivalent RC circuit, and an analytical method based on Green's functions. In the time domain, the impulse response to a Dirac temperature excitation on the outer surfaces of the structure is considered. The results obtained using two different methods are compared in the time domain using the corresponding Green's functions obtained analytically and by analyzing the corresponding equivalent RC circuit. In the complex domain, the circular diagrams, i.e. flow charts of the system transfer function obtained using the equivalent RC circuit, are analyzed.

MODELING HEAT TRANSPORT THROUGH MULTILAYER PLANAR STRUCTURES USING ELECTRICAL ANALOGIES AND ANALYTICAL METHOD IN TIME AND COMPLEX DOMAIN

Radovan Gospavić