

Метод моделовања резонатора са две блиске фреквенције применом нарушења симетрије

Павле Стипсић

Група за гравитацију, честице и поља
Институт за физику, Универзитет у Београду
Прегревица 118, 11080, Београд, Србија
pstipsic@ipb.ac.rs

Апстракт—У овом раду ћемо изложити поступак моделовања полигоналних резонатора са деформисаном C_{nv} симетријом. Резонатори су облика једнакостраничног троугла, квадрата и круга, благо издужених дуж одређеног правца. Нарушење симетрије смањује димензију неких иредуцибилних подпростора са два на један и доводи до раздвајања фреквенција двоструких модова за осциловање у спектру. Метод даје предвиђање резонантних фреквенција и цепање спектра у зависности од параметра деформације.

Кључне речи—резонатор, симетрија, теорија репрезентација, нарушење симетрије

I УВОД

Резонатори су основни елементи за конструкцију кола у електротехници. Коришћење резонатора са више резонантних учестаности смањује број елемената потребних за реализацију кола и самим тим смањује физичке димензије кола. Једна од могућих реализација резонатора јесте полигон или полигонална линија изведена у проводном слоју са једне стране плочице кола. У секцији II ћемо размотрити утицај симетрије полигона на резонантни спектар, а затим ћемо у секцији III разложити простор стања резонатора на иредуцибилне компоненте. У секцији IV ћемо наметнути граничне услове на модове осциловања у појединачним иредуцибилним подпросторима, а у секцијама V и VI ћемо редом моделовати утицај термалних губитака и нарушења симетрије на резонантни спектар. У целом раду је подразумеван природни систем јединица, што значи да су све физичке величине изражене у метрима на одговарајући степен. Метрика у простору Минковског је са сигнатуром $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

II УТИЦАЈ СИМЕТРИЈЕ НА СПЕКТАР РЕЗОНАТОРА

Посматраћемо резонаторе облика правилног n -тоугла. Група симетрије коју поседује правилан n -тоугао је C_{nv} , односно операције које чувају симетрију су ротације у равни за целобројни умножак угла од $\frac{2\pi}{n}$ радијана, што чини C_n подгрупу, као и рефлексije

у односу на свих n оса симетрије. Групу рефлексije у односу на вертикалну осу симетрије означавамо са σ_v , а цела група симетрије онда има структуру

$$C_{nv} = C_n \rtimes \sigma_v. \quad (1)$$

Група C_n је инваријантна подгрупа укупне групе симетрије C_{nv} и коњугација елемента c_k групе C_n рефлексijом σ_v даје инверзни елемент c_{-k} . То значи да C_{nv} група није Абелова и ако C_n и σ_v јесу:

$$\sigma c_k \sigma^{-1} = \sigma c_k \sigma = (\sigma c_1 \sigma)^k = (c_{-1})^k = c_{-k}. \quad (2)$$

Простор стања резонатора је Хилбертов простор функција које описују расподелу електромагнетног поља унутар резонатора. Групу симетрије репрезентујемо скупом оператора у том простору и тај скуп називамо репрезентацијом. Репрезентацију сваког елемента g групе G означавамо са $D(g)$. Избор репрезентације групе је у великој мери произвољан докле год задовољава правило множења $D(gg') = D(g)D(g')$, али се испоставља да се у случају наше групе симетрије, као и велоког броја група од значаја за физику, свака репрезентација може разложити по скупу иредуцибилних репрезентација. Иредуцибилне репрезентације групе представљају репрезентације групе у иредуцибилним подпросторима укупног простора стања, при чему је дефиниција иредуцибилног подпростора та да је то подпростор у ком се сваки вектор из подпростора деловањем свих елемената групе засебно пресликава у скуп вектора који разапичу цео подпростор. Другим речима, унутар иредуцибилног подпростора не постоји вектор помоћу ког се деловањем свих елемената групе не може реконструисати цео иредуцибилни подпростор. Разлагање репрезентације на иредуцибилне компоненте је онда ортогонални збир репрезентација по иредуцибилним подпросторима дат са:

$$D(G) = \bigoplus_{\mu=1}^r f_{\mu} D^{(\mu)}(G), \quad (3)$$

где је f_{μ} фреквенција појављивања μ -те иредуцибилне репрезентације у разлагању, а r укупан број иредуцибилних репрезентација.

Иредуцибилне репрезентације поседују скуп особина које ће нам бити од значаја приликом разматрања како симетријских особина резонатора, тако и приликом

одређивања разлагања простора стања на његове иредуцибилне компоненте. Неке од значајних особина су дате следећим исказима:

- Прва Шурова лема: Оператор који комутира са свим елементима групе у једној иредуцибилној репрезентацији делује као скаларни оператор у тој репрезентацији. То значи да је оператор у базису иредуцибилних репрезентација дијагоналан и да су му све вредности на дијагонали исте унутар појединачних иредуцибилних подпростора.
- Друга Шурова лема: Једини оператор A за који једнакост $AD^{(\mu)}(g) = D^{(\nu)}(g)A$ важи за сваки елемент g групе G , при чему су $D^{(\mu)}$ и $D^{(\nu)}$ нееквивалентне иредуцибилне репрезентације, тј. једна није добијена од друге променом базиса, је оператор $A = 0$.
- Теорема о ортогоналности компонената иредуцибилних репрезентација:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} D_{ij}^{(\mu)}(g^{-1}) D_{kl}^{(\nu)}(g) = \frac{1}{|\nu|} A_{il} (A^{-1})_{kj} \delta^{\mu\nu}, \quad (4)$$

где је $|G|$ број елемената групе G , $|\nu|$ димензија ν -тог иредуцибилног подпростора, а A оператор промене базиса између μ -те и ν -те репрезентације у случају када су оне међусобно еквивалентне.

- Карактер репрезентације $\chi(G)$, ондносно траг матричне репрезентације, као функција на групи, такође задовољава сличну релацију ортогоналности:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi^{(\nu)}(g) = \delta^{\mu\nu}. \quad (5)$$

Ова релација нам омогућава да одредимо коефицијенте у разлагању репрезентације на нееквивалентне иредуцибилне компоненте као:

$$f^\mu = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi(g). \quad (6)$$

ТАБЕЛА I ИРЕДУЦИБИЛНЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ C_{nv} ГРУПА

$D^{(\mu)}(C_{nv})$	μ	c_k	σc_k
$A_0/B_0 = D^{(0\pm)}(C_{nv})$	0	1	± 1
$A_{n/2}/B_{n/2} = D^{(n/2\pm)}(C_{nv})$	$\frac{n}{2}$	$(-1)^k$	$\pm(-1)^k$
$E_\mu = D^{(\mu)}(C_{nv})$	$1 \dots \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$	$\begin{pmatrix} e^{i\mu \frac{2\pi}{n} k} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu \frac{2\pi}{n} k} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\mu \frac{2\pi}{n} k} \\ e^{i\mu \frac{2\pi}{n} k} & 0 \end{pmatrix}$

Очекивано, како је инваријантна подгрупа Абелова и индекса два, димензије иредуцибилних репрезентација не могу бити веће од два. На основу табеле такође закључујемо да симетрија обезбеђује постојање парова модела за осциловање са истом фреквенцијом. Детаљан преглед особина иредуцибилних репрезентација се може пронаћи у [1].

- Број иредуцибилних репрезентација групе је једнак броју класа коњугације у групи.
- Може се увести појам регуларне репрезентације чији је карактер функција на групи која јединичном елементу додељује број елемената групе, а свим осталим елементима нулу. Ова функција је аналогон Дираквој односно Кронекеровој делти над елементима групе. На основу претходне особине се добија да је фреквенција појављивања сваке нееквивалентне иредуцибилне репрезентације у разлагању регуларне репрезентације једнак димензији иредуцибилне репрезентације.
- Број елемената групе једнак је збиру квадрата димензија свих нееквивалентних иредуцибилних репрезентација групе.

На основу прве Шурове леме можемо да закључимо да су све иредуцибилне репрезентације Абелових група једнодимензионалне. Такође, како се оператор фреквенције модела за осциловање не трансформише приликом дејства елемената групе симетрије, закључујемо да он комутира са репрезентацијама свих елемената групе, па су му поново, према првој Шуровој лем, својствене вредности дегенерисане унутар иредуцибилних подпростора. То значи да ће сви модели за осциловање унутар једног иредуцибилног подпростора бити са истом фреквенцијом, а дегенерација фреквенције је једнака димензији иредуцибилног подпростора.

У даљем раду ћемо из скупа нееквивалентних иредуцибилних репрезентација одабрати унитарне представнике, па ће ротације у равни бити репрезентоване множењем комплексним бројем са јединичне кружнице, $e^{i\mu \frac{2\pi}{n}}$, а рефлексација ће бити репрезентована комплексном коњугацијом. Бројач репрезентације μ узима све вредности природних бројева од 1 до n .

Поступак добијања скупа нееквивалентних иредуцибилних репрезентација произвољне групе не постоји. Ипак, у случају C_{nv} групе постоји алгоритам индукције са инваријантне C_n подгрупе индекса 2, који даје комплетан скуп иредуцибилних репрезентација које се могу пописати табеларно:

III РАЗЛАГАЊЕ КООРДИНАТНЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ

Скуп једначина стања резонатора чине диференцијална једначина кретања електромагнетног поља у резонатору и једначина за проводност средине σ :

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu, \quad j^i = \sigma^i_j (\partial^j A^0 - \partial^0 A^j). \quad (7)$$

Прва једначина се може поједноставити фиксирањем Лоренцовог калибрационог услова за електромагнетни потенцијал A^μ , $\partial_\mu A^\mu = 0$, док за струју j^μ већ важи идентична релација која описује једначину континуитета $\partial_\mu j^\mu = 0$. У свим једначинама подразумевамо Ајнштајнову сумациону конвенцију по поновљеним индексима, као и да су малим грчким словима означене све просторвременске компоненте поља, а малим латинским само просторне компоненте поља. Нулта координата је резервисана за временску компоненту.

Обе једначине су записане у координатној репрезентацији у координатном базису који није својствен за диференцијалне операторе у њима, па је први корак свакако прелазак у базис равних таласа, импулсни базис, који је својствен овим једначинама, а потом је потребно конструисати модификоване групне пројекторе

$$P(D^{(\mu)*} \otimes D) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} D^{(\mu)}(g^{-1}) \otimes D(g), \quad (8)$$

који ће комплетан простор стања у својственом базису пројектовати на вишеструки збир иредуцибилних подпростора групе симетрије, такође у својственом базису. Вектори фиксне тачке овог пројектора су облика:

$$|\mu t_\mu\rangle = \sum_{i=1}^{|\mu|} |\mu i\rangle \otimes |\mu t_\mu i\rangle, \quad (9)$$

где индекс t_μ пребројава појављивање μ -те иредуцибилне репрезентације у разлагању. Тако ћемо добити базис C_{nv} -симетричних таласа. Како је простор стања не-сепарабилан, очекујемо да се бар једна иредуцибилна репрезентација у разлагању појављује бесконачан број пута и да се њено појављивање пребројава реалним параметром. Након разлагања репрезентације ћемо видети да су појављивања свих иредуцибилних компонената пребројана реалним параметрима који ће имати смирао квадрата импулса електромагнетног таласа. Овај базис је у случају једнодимензионалних репрезентација дат са:

$$\begin{aligned} f_{k_\mu}^{A_0}(x^\mu) &= \frac{1}{n} e^{i(k_z z - \omega t)} \sum_{m=1}^n e^{ik_x(x \cos(\frac{2\pi}{n}m) - y \sin(\frac{2\pi}{n}m))} \\ &\quad \times \cos(k_y(y \cos(\frac{2\pi}{n}m) + x \sin(\frac{2\pi}{n}m))), \\ f_{k_\mu}^{B_0}(x^\mu) &= \frac{1}{n} e^{i(k_z z - \omega t)} \sum_{m=1}^n e^{ik_x(x \cos(\frac{2\pi}{n}m) - y \sin(\frac{2\pi}{n}m))} \\ &\quad \times \sin(k_y(y \cos(\frac{2\pi}{n}m) + x \sin(\frac{2\pi}{n}m))), \\ f_{k_\mu}^{A_{\frac{n}{2}}}(x^\mu) &= \frac{1}{n} e^{i(k_z z - \omega t)} \sum_{m=1}^n e^{ik_x(x \cos(\frac{2\pi}{n}m) - y \sin(\frac{2\pi}{n}m))} \\ &\quad \times \cos(k_y(y \cos(\frac{2\pi}{n}m) + x \sin(\frac{2\pi}{n}m))) e^{-im\pi}, \\ f_{k_\mu}^{B_{\frac{n}{2}}}(x^\mu) &= \frac{1}{n} e^{i(k_z z - \omega t)} \sum_{m=1}^n e^{ik_x(x \cos(\frac{2\pi}{n}m) - y \sin(\frac{2\pi}{n}m))} \\ &\quad \times \sin(k_y(y \cos(\frac{2\pi}{n}m) + x \sin(\frac{2\pi}{n}m))) e^{-im\pi}, \end{aligned} \quad (10)$$

док је у случају дводимензионалних репрезентација:

$$\begin{aligned} f_{k_\mu}^{E_j}(x^\mu) &= \frac{1}{n} e^{i(\omega t - k_z z)} \sum_{m=1}^n e^{-ik_x(x \cos(\frac{2\pi}{n}m) - y \sin(\frac{2\pi}{n}m))} \\ &\quad (\cos(k_y(y \cos(\frac{2\pi}{n}m) + x \sin(\frac{2\pi}{n}m))) - \frac{2\pi}{n}mj) \\ &\quad \oplus \cos(k_y(y \cos(\frac{2\pi}{n}m) + x \sin(\frac{2\pi}{n}m))) + \frac{2\pi}{n}mj). \end{aligned} \quad (11)$$

У следећој секцији ћемо наметањем граничних услова из овог не-сепарабилног простора издвојити сепарабилни подпростор који ће бити дефинисан дискретним скупом дозвољених вредности индекса k_μ . Сепарабилност простора стања обезбеђује дискретну природу спектра резонантних фреквенција.

IV МОДОВИ ЗА ОСЦИЛОВАЊЕ ИДЕАЛНОГ РЕЗОНАТОРА

Да бисмо из укупног не-сепарабилног простора стања издвојили сепарабилни подпростор који одговара модовима за осциловање, потребно је да наметнемо одређене услове на сама стања. Ови услови су заправо гранични услови који су садржани у тензору проводности:

$$\begin{aligned} \sigma^i_j &= \left(\tilde{\delta}(z+d) + \tilde{\delta}(z)\Pi(x,y) \right) \frac{1}{\rho} (\delta^i_x \delta^x_j + \delta^i_y \delta^y_j) \\ &\quad + \theta(z+d)\theta(-z)\sigma\delta^i_j. \end{aligned} \quad (12)$$

Функција $\Pi(x,y)$ је прозорска функција полигоналног облика која има вредност 1 на домену који покрива проводни слој резонатора, а вредност 0 иначе, док је $\tilde{\delta}(z)$ јединични прозор дебљине проводног слоја. Функција $\theta(z)$ је стандардна Хевисајдова тета функција.

Први гранични услов који намећемо је по z координати, па параметар базиса k_z узима целобаројне умношке од $\frac{2\pi}{d}$, где је d дебљина резонатора. Прва апроксимација коју ћемо направити је та да ћемо сматрати да је резонатор превише танак да би се побудили модови за осциловање у z правцу, па ћемо се ограничити само на подпростор $k_z = 0$.

Наметање граничних услова у равни резонатора се не може увек тако лако извршити. Наиме, како је базис у простору стања састављен од периодичних функција, сви наметнути гранични услови ће се периодично понављати. То значи да се на појединачни базисни вектор могу наметнути гранични услови само у случају оних полигоналних облика којим се раван може попложити без празнина, а то су троуглови, квадрати и шестоуглови. Додатно, како шестоугаона решетка има елементарну Вигнер-Зајцову ћелију састављену од два типа чворова, ово наметање граничних услова неће бити могуће у свим иредуцибилним репрезентацијама, већ само у оним у којима су ова два чвора еквивалентна. У осталим случајевима се гранични услови намећу линеарним комбинацијама вектора вишеструких иредуцибилних компонената, што је случај са кружним резонатором код којег је базис у поларним координатама дат преко цилиндричних Беселових функција прве врсте. Ове функције су, иако осцилаторне, непериодичне, па ће такве

бити и таласне функције са симетријом C_{nv} за $n > 4$. Због тога ћемо се у даљем раду фокусирати специјално на троугаони, квадратни и кружни резонатор.

У случају троугаоног резонатора, висине троугла једнаке h , наметање граничних услова даје по два базисна вектора из сваке једнодимензионалне иредуцибилне репрезентације:

$$\begin{aligned}
 f_{k1,2}^{A_{0,s}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\sin \left(x \frac{(2p+3q)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{q\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right. \\
 &\quad - \sin \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(p+2q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \\
 &\quad \left. - \sin \left(x \frac{(p+3q)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(p+q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{A_{0,c}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(x \frac{(2p+3q)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{q\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right. \\
 &\quad + \cos \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(p+2q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \\
 &\quad \left. + \cos \left(x \frac{(p+3q)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(p+q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{B_{0,s}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\sin \left(x \frac{(2p+3q)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{q\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right. \\
 &\quad + \sin \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(p+2q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \\
 &\quad \left. - \sin \left(x \frac{(p+3q)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(p+q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{B_{0,c}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(x \frac{(2p+3q)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{q\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right. \\
 &\quad - \cos \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(p+2q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \\
 &\quad \left. + \cos \left(x \frac{(p+3q)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(p+q)\sqrt{3}\pi}{h} \right) \right), \tag{13}
 \end{aligned}$$

док се у случају дводимензионалне репрезентације услови могу наметнути на два начина за сваки вектор из репрезентације. У случају E_1^+ репрезентације се добија:

$$\begin{aligned}
 f_{k1,2}^{E_1^+,s_1}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\sin \left(x \frac{(2p+3q+1)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad - \sin \left(x \frac{(p+3q+1)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. - \sin \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+6q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{E_1^+,c_1}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(x \frac{(2p+3q+1)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad + \cos \left(x \frac{(p+3q+1)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. + \cos \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+6q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{E_1^+,s_2}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\sin \left(x \frac{(2p+3q+2)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad - \sin \left(x \frac{(p+3q+2)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. - \sin \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+6q+4)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{E_1^+,c_2}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(x \frac{(2p+3q+2)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad + \cos \left(x \frac{(p+3q+2)\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. + \cos \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \cos \left(y \frac{(3p+6q+4)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \tag{14}
 \end{aligned}$$

а у случају E_1^- :

$$\begin{aligned}
 f_{k1,2}^{E_1^-,s_1}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\sin \left(x \frac{(2p+3q+1)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad - \sin \left(x \frac{(p+3q+1)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. + \sin \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+6q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{E_1^-,c_1}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(x \frac{(2p+3q+1)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad + \cos \left(x \frac{(p+3q+1)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+3q+1)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. - \cos \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+6q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{E_1^-,s_2}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\sin \left(x \frac{(2p+3q+2)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad - \sin \left(x \frac{(p+3q+2)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. + \sin \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+6q+4)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{E_1^-,c_2}(x^{1,2}) &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(x \frac{(2p+3q+2)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad + \cos \left(x \frac{(p+3q+2)\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+3q+2)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. - \cos \left(x \frac{p\pi}{h} \right) \sin \left(y \frac{(3p+6q+4)\pi}{h\sqrt{3}} \right) \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Бројеви p и q су природни бројеви или нула.

У случају C_{4v} симетрије се на сличан начин добијају базисни вектори. У случају једнодимензионалних репрезентација вектори су једнаки:

$$\begin{aligned}
 f_{k1,2}^{A_{0,s}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(x \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos \left(x \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{A_{0,c}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(x \frac{2q\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos \left(x \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{2q\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{B_{0,s}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x \frac{2q\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sin \left(x \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{2q\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{B_{0,c}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sin \left(x \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{A_{2,s}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(x \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \cos \left(x \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{A_{2,c}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(x \frac{2q\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \cos \left(x \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{2q\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{B_{2,s}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x \frac{2q\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sin \left(x \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{2q\pi}{a} \right) \right), \\
 f_{k1,2}^{B_{2,c}}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sin \left(x \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \right), \tag{17}
 \end{aligned}$$

а у случају дводимензионалне репрезентације једнаки:

$$\begin{aligned} f_{k1,2}^{E_{1,2}^{\pm},s}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x \frac{2q\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm i \cos \left(x \frac{(2(p+q)+1)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{2q\pi}{a} \right) \right), \\ f_{k1,2}^{E_{1,2}^{\pm},c}(x^{1,2}) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \cos \left(y \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm i \cos \left(x \frac{2(p+q)\pi}{a} \right) \sin \left(y \frac{(2q+1)\pi}{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Бројеви p и q и овде узимају вредности из скупа природних бројева и нуле, а a је дужина странице квадрата. За више детаља о наметању граничних услова погледајте [2].

Ови вектори описују како компоненте електромагнетног поља, тако и компоненте струје. За анализу модела за осциловање ћемо се фокусирати на опис компоненти струје. Струју ћемо поделити на две компоненте, паралелну с ивицом полигона и нормалну на ивицу полигона. Паралелна компонента струје може да се разлаже и у s и у c базису, док нормална компонента постоји само у s базису. У специјалном случају када је резонатор реализован у облику полигоналне линије, ортогонална компонента струје се може занемарити, а паралелна се редукује само на c базис.

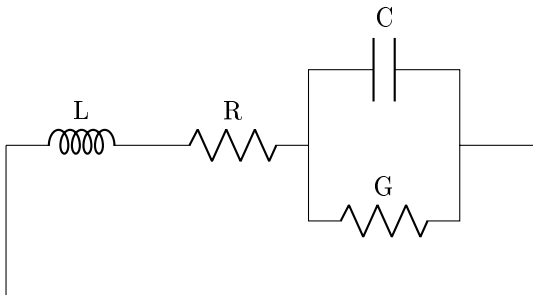
V УТИЦАЈ ГУБИТАКА НА СПЕКТАР РЕЗОНАТОРА

У колико бисмо убацили базисне векторе добијене у претходном поглављу у хомогену једначину кретања за електромагнетно поље, добили бисмо услов на фреквенцију слободног електромагнетног таласа и ове фреквенције су једнаке:

$$\begin{aligned} (\omega_0^{C_{3v}})^2 &= \frac{4\pi^2}{3h^2} (q^2 + 3pq + 3p^2), \\ (\omega_0^{C_{4v}})^2 &= \frac{\pi^2}{a^2} (\xi^2 + \psi^2), \end{aligned} \quad (19)$$

где је $\xi = 2q$ или $\xi = 2q + 1$ и $\psi = 2(p + q)$ или $\psi = 2(p + q) + 1$ у зависности од репрезентације.

У присуству губитака услед отпорности проводних слојева и проводности материјала од којег је плочица израђена, резонантне фреквенције ће бити снижене. Сам резонатор ћемо апроксимирати колом са слике 1.



Слика 1: Апроксимативно коло за моделирање губитака у резонатору.

Апроксимативне вредности елемената кола су:

$$C = \frac{S}{d}, \quad G = \sigma C, \quad R = \frac{\rho}{\omega_0^2 S}, \quad L = \frac{d}{\omega_0^2 S}. \quad (20)$$

Капацитет C и проводност G зависе искључиво од геометрије резонатора и специфичне проводности диелектрика σ од ког је плочица састављена и расту с повећањем површине резонатора S . Отпорност R зависи како од геометрије резонатора и отпорности проводног слоја ρ , тако и од просторне расподеле струја, односно таласне дужине мода за осциловање. Индуктивност L такође зависи од геометрије резонатора и таласне дужине мода за осциловање и расте с повећањем дебљине диелектрика d . Анализом кола се добија да је нова резонантна фреквенција са урачунатим губицима:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{\rho^2}{d^2} \right)}. \quad (21)$$

Резонантна фреквенција је имагинарни део пола пропатора функција стања у својственом базису тангентног простора, у овом случају простора тангентног на време.

VI НАРУШЕЊЕ СИМЕТРИЈЕ РЕЗОНАТОРА

Да бисмо контролисано уклонили дегенерацију фреквенције унутар дводимензионалних иредуцибилних подпростора деформисаћемо резонатор дуж правца под произвољним углом ϕ у равни резонатора. Постоје два главна приступа решавању једначина за деформисани резонатор. Први је да се промене гранични услови тако да одговарају деформисаном резонатору у старим координатама, а други је да се старе координате рескалирају тако да се гранични услови деформисаног резонатора поклопе са граничним условима из базиса, али да се ефективно промени једначина стања резонатора. Овај други приступ је много једноставнији за рад, будући да смо целу просцедуру конструисали тако да у њу уградимо граничне услове, а додатни сабирци у једначини стања осцилатора се могу интерпретирати као мале пертурбације по параметру деформације. У ту сврху ћемо увести оператор рескалирања координата као:

$$\begin{aligned} \partial'_i &= D_\phi(\varepsilon)_i^j \partial_j = (R(\phi) D_0(\varepsilon) R(-\phi))_i^j \partial_j \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \cos^2(\phi) & \varepsilon \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \varepsilon \sin(\phi) \cos(\phi) & 1 + \varepsilon \sin^2(\phi) \end{pmatrix}_i^j \partial_j. \end{aligned} \quad (22)$$

Параметар ε је параметар рескалирања координата који ефективно деформише резонатор. Нова једначина стања резонатора се разликује од старе јер сада Лапласијан у равни резонатора постаје:

$$\partial'_i \partial'^i = \partial_i \partial^i - \varepsilon(2 + \varepsilon) (\cos(\phi) \partial_x + \sin(\phi) \partial_y)^2. \quad (23)$$

Додатни сабирак $\varepsilon(2 + \varepsilon) (\cos(\phi) \partial_x + \sin(\phi) \partial_y)^2$ разбија дегенерацију унутар иредуцибилних подпростора, па се прве поправке фреквенција могу добити дијагонализацијом његове матричне репрезентације у иредуцибилном подпростору. Ако својствене вредности поправке у иредуцибилном подпростору означимо са $\Delta_{\mu, t_\mu}^i(\varepsilon, \phi)$, где је μ бројач репрезентације, t_μ бројач појављивања

μ -те репрезентације и i пребројава својствене вредности поправке унутар (μ, t_μ) -тог иредуцибилног подпростора, фреквенције модова постају

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta_{\mu, t_\mu}^i(\varepsilon, \phi) - \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{\rho^2}{d^2} \right)}. \quad (24)$$

Када пројектујемо резонатор, димензије прилагођавамо тако да пропусни опсег одговара фреквенцијама из најниже димензионалне иредуцибилне репрезентације, а да остале фреквенције буду потиснуте. Због тога ћемо се фокусирати само на први димензионални иредуцибилни подпростор. У случају троугаоног резонатора ова репрезентација одговара паралелној компоненти струје у c базису $E_1^{\pm,1}$ и поправка је једнака:

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1} &= \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{h^2} \begin{pmatrix} \frac{32\pi^2+81\cos(2\phi)}{48} & -\frac{27}{16}\sin(2\phi) \\ -\frac{27}{16}\sin(2\phi) & \frac{32\pi^2-81\cos(2\phi)}{48} \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \Delta_{0,1}^{\pm} &= \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{h^2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \pm \frac{27}{16} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Видимо да поправка овде не зависи од угла под којим се врши деформација.

У случају квадратног резонатора се поново најнижи дегенерисани спектар добија за паралелну компоненту струје у c базису репрезентације $E_1^{\pm}$. За компоненте поправке добијамо:

$$\Delta_{0,1} = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)\pi^2}{a^2} \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) & 0 \\ 0 & \sin^2(\phi) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Видимо да је поправка дијагонална и да разбија дегенерацију у првом реду када се деформација не врши по дијагонали квадрата, а да је раздвајање фреквенција најизраженије када се квадрат издужује у правоугао-ник.

Кружни резонатор је специфичан по томе што се његова анализа може извршити преласком у поларне координате у којима гранични услов не зависи од угла. Његова група симетрије је лимес бесконачног n , $C_{\infty v}$, односно група цикличних ротација прелази у групу континуалних ротација $C_\infty \rightarrow SO(2)$, чија је универзално наткривајућа група $U(1)$. Таблица иредуцибилних репрезентација губи средњу врсту јер $A_{n/2}$ и $B_{n/2}$ репрезентације нису дефинисане, вектори у B_0 репрезентацији су једнаки нули, тако да остаје само једна једнодимензионална иредуцибилна репрезентација A_0 , док у последњој врсти бројач димензионалних иредуцибилних репрезентација m броји до бесконачности, а параметар $\varphi = \frac{2\pi}{n}k$ постаје континуалан. Базисни вектори су:

$$f_k^{A_0}(r, \varphi) = J_0(kr), \quad f_k^{E_m^{\pm}}(r, \varphi) = J_m(kr)e^{\pm im\varphi}. \quad (27)$$

Као и до сада, постоји s и c базис, такав да је у s базису вредност Беселове функције на граници једнака нули, а у c базису је вредност првог извода Беселове функције на граници једнака нули. Фреквенција (k, m) -тог мода идеалног резонатора је једнака $\omega_0 = k$.

Структура оператора поправке нам указује да је способан да уклони дегенерацију само унутар $E_1^{\pm}$ репрезентације, јер садржи само сабирке $e^{\pm 2i\varphi}$ и $e^{0i\varphi}$. Раније у

случају квадрата и троугла нисмо приметили ову особину, јер се тамо нису појављивале димензионалне репрезентације реда већег од 1. Фреквенције у осталим димензионалним репрезентацијама остају дегенерисане и бивају само померене као последица деформације. На исти начин се померају и фреквенције унутар A_0 репрезентације. Овај померај фреквенције је једнак:

$$\Delta_{k,m \neq 1}^{\pm} = \varepsilon(2+\varepsilon)\frac{k^2}{2}. \quad (28)$$

У случају репрезентације $E_1^{\pm}$ дегенерација се уклања и помераји фреквенције су једнаки:

$$\begin{aligned} \Delta_{k,1}^{\pm} &= \varepsilon(2+\varepsilon)\frac{k^2}{2} \\ &\pm \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{4} \left(k^2 + \frac{J_1^2(kR)}{R^2(J_1^2(kR) - J_0(kR)J_2(kR))} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где је R полупречник резонатора. Најниже фреквенције у спектру и овог пута припадају димензионалној репрезентацији E_1 у c базису, где је $kR \approx 1.8412$. Очекивано, због $SO(2)$ симетрије круга, поправке фреквенција не зависе од угла под којим се врши деформација.

За више детаља о примени симетрије и механизмима и последицама њеног нарушења погледати [3].

VII ЗАКЉУЧАК

Модови у c базису E_1 репрезентације су увек имали најнижу фреквенцију, тако да резонатору треба ограничити пропусни опсег само са горње стране. Овде можемо да извршимо поређење фреквенција десетог мода за осциловање идеалних резонатора са све три геометрије и покажемо да са повећањем симетрије (порастом n), спектар резонантних фреквенција постаје гушћи, па је тако за $h = a = 2R = 1$:

$$\omega_{10}^{\Delta} \approx \sqrt{250}, \quad \omega_{10}^{\square} \approx \sqrt{168}, \quad \omega_{10}^{\circ} \approx \sqrt{114}. \quad (30)$$

Такође је однос између фреквенција у првом дегенерисаном спектру и фреквенције прве следеће моде у спектру опадајући са порастом симетрије и износи $\sqrt{3}$ за троугани, $\sqrt{2}$, за квадратни, и приближно 1.31 за кружни резонатор. Одатле следи да је троугаона геометрија најповољнија за конструкцију резонатора са две блиске резонантне учестаности, јер троугаони резонатор има најразређенији спектар.

VIII РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] М. Дамњановић "Хилберт-ови простори и групе," Физички факултет, Универзитет у Београду, 2016.
- [2] П. Стипсић, М. Миливојевић "Control of a spin qubit in a lateral GaAs quantum dot based on symmetry of gating potential," Phys. Rev. B, vol. 101, issue 16, American Physical Society, pp. 165302-165311, doi 10.1103/PhysRevB.101.165302, April 2020.
- [3] М. Дамњановић "О симетрији у квантној нерелативистичкој физици," Физички факултет, Универзитет у Београду, 2000.