Određivanje merne nesigurnosti transfera Hamonovih otpornika

Stefan Mirković, Tatjana Grbić, Nemanja Gazivoda, Đorđe Novaković, Zdravko Gotovac, Dragan Pejić

***Apstrakt*— Cilj ovog rada je razmatranje procene merne nesigurnosti transfera Hamonovih etalona koristeći GUM i Monte Carlo metodu. U dosadašnjim istraživanjima ustanovljeno je da je transfer u velikoj meri vezan za broj otpornika koji čine Hamonov etalon i da se vrednost tog transfera poznaje sa velikom pouzdanošću gledajući sa metrološke strane. U radu je pokušano da se na osnovu dve metode proceni merna nesigurnost vrednosti transfera, da se uporede ti rezultati i da se izvedu korisni zaključci koji mogu biti od koristi za buduća istraživanja.**

***Ključne reči*—električna otpornost, hamonov otpornik, metrologija, merna nesigurnost.**

I. Uvod

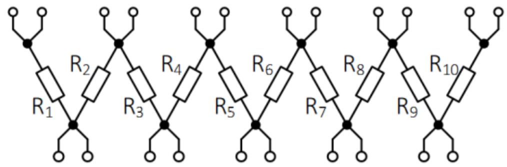
Pod Hamonovim otpornicima se smatra grupa od n otpornika iste nazivne vrednosti koji su međusobno trajno redno povezani preko četvorožičnih spojeva. Otpornost izvoda ovih spojeva uračunata je u otpornost pojedinačnih otpornika. Kod Hamonovih otpornika, teži se da se postigne visoka tačnost pojedinačnih otpornika. Na naponske i strujne izvode otpornika dodaju se kompenzacioni otpornici koji svi zajedno čine kompenzacionu mrežu. Prespajanje u paralelnu vezu vrši se korišćenjem kompenzacione mreže i posebno projektovanih kratkospojnika. Za n redno vezanih otpornika pri povezivanju u paralelnu vezu postiže se smanjenje otpornosti za veoma približno n^2 puta. Odnos otpornosti redne i paralelne veze naziva se i transferom Hamonovog otpornika.

Cilj ovog rada je da pokaže matematički pristup računanja merne nesigurnosti transfera Hamonovih otpornika prema GUM [1] metodi, da rezultate te analize uporedi sa rezultatima Monte Carlo (MCM) [2] simulacije, i da pokaže jedan interesantan primer gde se može steći pogrešna procena matematičkog modela ukoliko se problem ne sagleda sa različitih strana.

Stefan Mirković – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: mirkovicst@uns.ac.rs), ORCID ID (https://orcid.org/0000-0002-3210-5603)
Tatjana Grbić – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: tatjana@uns.ac.rs), ORCID ID (https://orcid.org/0000-0002-4236-7164)
Nemanja Gazivoda – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: nemanjagazivoda@uns.ac.rs), ORCID ID (https://orcid.org/0000-0002-7705-0351)
Đorđe Novaković – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: djordjenovakovic@uns.ac.rs), ORCID ID (https://orcid.org/0000-0001-8938-7296)
Zdravko Gotovac – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: zdravko.gotovac@uns.ac.rs), ORCID ID (https://orcid.org/0000-0002-8699-803X)
Dragan Pejić – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: pejicdra@uns.ac.rs), ORCID ID (https://orcid.org/0000-0002-8380-018X)

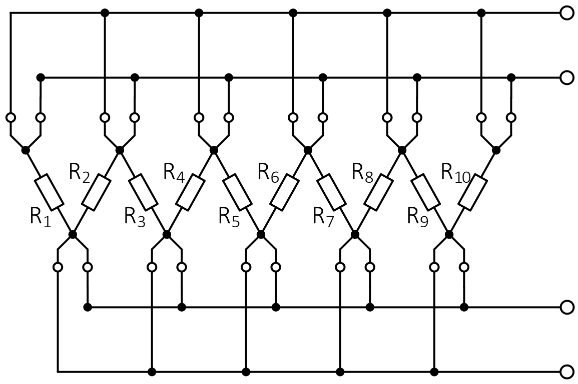
II. Hamonov transfer etalon

Hamonovi etaloni se sastoje od n redno vezanih otpornika iste nazivne vrednosti, gde je povezivanje obavljeno četvorožično tako da je omogućen direktan pristup bilo kojem naponskom i strujnom izvodu svakog otpornika pomoću ugrađenih terminala.



Sl. 1. Hamonovi otpornici u serijskoj vezi

Hamonova metoda za serijsko povezivanje podrazumeva korištenje četvorokrajnih spojeva, a za prevezivanje serijske u paralelnu vezu korištenje kratkospojnih šipki i paralelne kompenzacione šipke.



Sl. 2. Hamonovi otpornici u paralelnoj vezi

III. Merna nesigurnost transfera (GUM)

Posmatra se grupa od n otpornika iste nazivne vrednosti. Stvarna vrednost pojedinačnog i–tog otpornika je R_i. Ekvivalentna otpornost redne veze n otpornika (R_S) je:

$$R_S = R_1 + ... + R_n . \tag{1}$$

 ISBN 978-86-7466-969-3

Ekvivalentna otpornost paralelne veze n otpornika (R_P) može se odrediti na osnovu sledećeg izraza

$$\frac{1}{R_P}=\frac{1}{R_1}+...+\frac{1}{R_n}. \tag{2}$$

Odnos ekvivalentne otpornosti serijske i paralelne veze n otpornika-transfer (T) je

$$\mathrm{T}=\frac{R_S}{R_P}=\left[R_1+...+R_n\right]\cdot\left[\frac{1}{R_1}+...+\frac{1}{R_n}\right]. \tag{3}$$

U mnogim slučajevima, merena veličina Y se ne meri direktno, nego se određuje na osnovu N uticajnih veličina: X_1, X_2, …, X_n , preko funkcije

$$Y=f(X_1,X_2,...,X_n). \tag{4}$$

Uticajne ulazne veličine X_1, X_2, …, X_n mogu biti posmatrane kao merene vrednosti i mogu zavisiti od drugih veličina, uključujući korekcije i faktore korekcije sistematske greške, što dovodi do komplikovanog funkcionalnog odnosa koji možda neće nikad biti eksplicitno zapisan. Procena merene veličine Y, obeležena sa y, dobijena prema izrazu (4), određuje se na osnovu procenjenih vrednosti ulaznih veličina X_1, X_2, …, X_n, koje su obeležene sa $x_1, x_2, …, x_n$. Na osnovu toga, procenjena vrednost y merene veličine je:

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n). \tag{5}$$

U većini slučajeva, najbolja moguća procena očekivane vrednosti merene veličine X_i koju možemo da posmatramo kao slučajnu promenljivu, za koju je izvršeno N merenja pod istim uslovima, je aritmetička sredina x_i

$$x_i=\overline{X}_i=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_{i,k}. \tag{6}$$

Pojedinačne opservacije veličine X_i razlikuju se zbog varijacije raznih uticajnih slučajnih efekata. Ekperimentalna varijansa opservacija, koja procenjuje varijansu funkcije gustine verovatnoće individiualne opservacije $X_{i,k}$ data je sa

$$s^2(X_{i,k})=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{i,k}^2-x_i\right)^2. \tag{7}$$

Za ulaznu veličinu X_i , koja je procenjena kao aritmetička sredina x_i na osnovu n pojedinačnih observacija $X_{i,k}$, standardna merna nesigurnost $u(x_i)$ jednaka je standardnoj devijaciji aritmetičke sredine i iznosi

$$u(x_i)=\frac{s(X_{i,k})}{\sqrt{n}}. \tag{8}$$

Ovako procenjenja merna nesigurnost naziva se standardna merna nesigurnost Tipa A. Za procenu x_i ulazne veličine X_i koja nije dobijena iz ponavljanja opservacija, pridružena standardna merna nesigurnost $u(x_i)$ se procenjuje na osnovu dostupnih informacija o mogućoj varijaciji veličine X_i, na primer iz rezultata prethodnih merenja, specifikacija proizvođača i sl. U ovom slučaju, u pitanju je standardna merna nesigurnost Tipa B. Merna nesigurnost Tipa B $u(x_i)$ aproksimira se procenjenom standarnom devijacijom veličinu X_i:

$$u(x_i)=s(X_i). \tag{9}$$

Standardna merna nesigurnost veličine y koja je procena merene veličine Y i koja je rezultat merenja, dobija se odgovarajućim kombinovanjem standardnih mernih nesigurnosti $u(x_1)$, $u(x_2)$, …, $u(x_n)$ procenjenih vrednosti $x_1, x_2, …, x_n$. Kombinovana merna nesigurnost $u_C(y)$ je kvadratni koren kombinovane varijanse

$$u_C^2(y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2u^2(x_i). \tag{10}$$

Ako su $u(R_i), i=1,...,n$ merne nesigurnosti pojedinačnih otpornosti, prema izrazu (10) standardna merna nesigurnost transfera se određuje prema

$$u^2(\mathrm{T})=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_i}\right)^2u^2(R_i). \tag{11}$$

Koeficijenti osetljivosti $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_i}, i=1,...,n$ svode se na:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_i}=\frac{\partial}{\partial R_i}\left(\left[\sum_{m=1}^{n}R_m\right]\cdot\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{R_m}\right]\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_i}=\left[-\frac{1}{R_i^2}\sum_{m=1}^{n}R_m\right]+\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{R_m}\right]. \tag{13}$$

Pošto su svi otpornici iste nazivne vrednosti R, može se reći da je $R_1=...=R_n=R$, izraz (13) postaje nula i samim tim dobija se da je

$$u^2(\mathrm{T})=0. \tag{14}$$

Na osnovu prethodnog izraza dolazi se do zaključka da je merna nesigurnost transfera jednaka nuli. Postavlja se pitanje da li je ovo zaista tako, jer bi u tom slučaju imali etalon odnosa otpornosti sa greškom jednakoj nuli. Ova činjenica vrlo lako uz nedovoljno iskustva može da se prihvati, i da se kasnije ova loša procena propagira na neki krajnji rezultat merenja. Prema GUM, pored definisanja uticajnih veličina čije vrednosti preko odgovarajuće funkcije služe za računanje merene veličine, potrebno je proceniti da li su uticajne veličine međusobno zavisne (korelisane) i da li je u samoj funkciji izražena nelinearnost. Ukoliko uticajne veličine nisu korelisane i funkcija nije nelinearna, izraz (10) može da se koristi za procenu merne nesigurnosti. Ukoliko se pogleda funkcija transfera (3), možemo videti da je kod nje izražena nelinearnost, pa se samim tim već dovodi u pitanje verodostojnost rezultata (14). Kako je ova funkcija model n nezavisnih otpornika od kojih se formira redna ili paralelna veza, gruba procena je da su ti otpornici u praksi međusobno nezavisni. Zajednička uticajna veličina postoji, kao što je temperatura, ali međusobna zavisnost ovih otpornika se smatra ovde da je gotovo jednaka nuli. Ovo je možda tema za neka buduća istraživanja ako bi se etaloni nalazili u kolu naizmenične struje, gde bi neki elektromagnetni efekti jednog otpornika uticali na ostale. Kada je izražena nelinearnost funkcije f u izrazu (5), u izrazu (10) moraju se uvrstiti i

 ISBN 978-86-7466-969-3

članovi višeg reda njenog razvoja u Tejlorov red. Najvažniji članovi višeg reda koji se trebaju dodati članovima iz (11) su

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}\right)^2+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_i}\frac{\partial^3 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j^2}\right]u^2(R_i)u^2(R_j)\cdot \tag{15}$$

Obzirom na činjenicu da je izraz (13) jednak nuli, izraz (11) svodi se na

$$u^2(\mathrm{T})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}\right)^2\right]u^2(R_i)u^2(R_j), \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}=\frac{\partial}{\partial R_i}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_j}=\frac{\partial}{\partial R_j}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial R_i}. \tag{17}$$

U slučaju kada je $i \neq j$ dobija se

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}=-\frac{1}{R_i^2}-\frac{1}{R_j^2}. \tag{18}$$

Kada je $i=j$ dobija se

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}=-\frac{2}{R_i^2}+\left[R_1+\ldots+R_n\right]\cdot\left[\frac{2}{R_i^3}\right]. \tag{19}$$

Uzimanjem činjenice da je $R_1=\ldots=R_n=R$, dobija se:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}=-\frac{2}{R^2},\ i\neq j, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial R_i \partial R_j}=\frac{2(n-1)}{R^2},\ i=j. \tag{21}$$

Uvrštavanjem izraza (20) i (21) u izraz (16) dobija se konačan izraz za mernu nesigurnost transfera

$$u^2(\mathrm{T})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{R^2}\right]^2u^2(R_i)u^2(R_j)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{2(n-1)}{R^2}\right]^2u^4(R_i)\cdot \tag{22}$$

Kako su merne nesigurnosti poznavanje pojedinačne otpornosti jednake, odnosno, izraz (22) za mernu nesigurnost transfera se može napisati kao

$$u(\mathrm{T})=n\sqrt{2(n-1)}\left[\frac{u(R)}{R}\right]^2. \tag{23}$$

Relativna merna nesigurnost transfera je

$$\frac{u(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}=\frac{u(\mathrm{T})}{n^2}=\frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}\left[\frac{u(R)}{R}\right]^2. \tag{24}$$

IV. Merna nesigurnost transfera (MCM)

Za procenu transfera simulacionim putem korištena je Monte Karlo metoda (MCM) gde su simulirana rasipanja vrednosti otpornika oko nazivne vrednosti. Procenjen transfer je veličina koja je definisana kao izlazna, dok su broj otpornika (n) i nazivna vrednost otpornika (R) definisane kao ulazne. Ulaznim veličinama (bez n) dodeljene su funkcije gustine verovatnoće (PDF) dok je n bio konstantan. Tokom računanja, funkcije gustine verovatnoće se prostiru kroz model i dobija se funkcija gustine verovatnoće izlazne veličine. Uzorkuje se M ulaznih veličina $R_{1,r},\ldots, R_{n,r}$, $r=1,\ldots,M$ iz funkcija gustine verovatnoće ulaznih veličina i izlazne veličine se izračunavaju za svaki od M uzoraka ulaznih vektora. Vrednosti izlaznih veličina koje odgovaraju r-tom uzorku ulaznih veličina određuju se iz sledećih modela

$$t_r=\sum_{i=1}^{n}R_{i,r}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_{i,r}}. \tag{25}$$

Vrednosti $t_1,\ldots, t_M$ koriste se za određivanje procene izlazne veličine T. Procena izlazne veličine T se uzima da je jednaka srednjoj vrednost $\hat{t}$, a procenjena merna nesigurnost u(T) ove vrednosti se uzima da je jednaka standardnoj devijaciji $s(\hat{t})$.

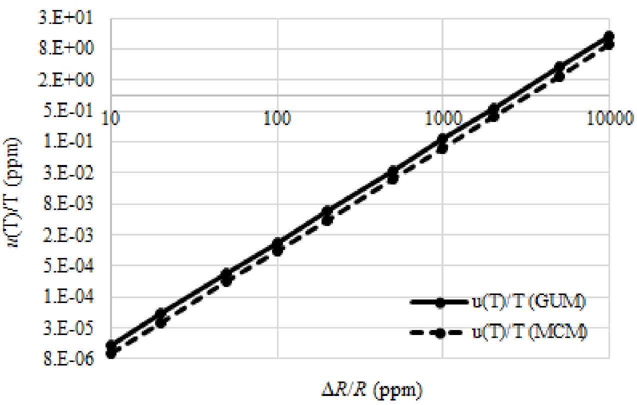
Proračun transfera baziran je na $M=10^6$ uzoraka jer ovo zadovoljava analizu za odabrani interval obuhvata od bar 95 %. Ovde se posmatrao isključivo nazivni transfer 100:1, odnosno n=10. Ulazne veličine su uzimale vrednosti koje su shodno proceni bile logične za analizu, dok je uzeta PDF bila uniformna.

$$\hat{t}=\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}t_r\quad,\quad s(\hat{t})=\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{r=1}^{M}(t_r-\hat{t})^2} \tag{26}$$

V. Rezultati poređenja

	GUM	MCM
$\Delta R/R$	u(T)/T	u(T)/T
(ppm)	(ppm)	(ppm)
10	1.4E-5	0.96E-5
20	5.7E-5	3.8E-5
50	3.5E-4	2.4E-4
100	1.4E-3	9.6E-4
200	5.7E-3	3.8E-3
500	3.5E-2	2.4E-2
1000	0.14	0.096
2000	0.57	0.38
5000	3.5	2.4
10000	14	9.6

Tabela 1. Vrednosti procenjene merne nesigurnosti prema GUM i MCM metodi



Sl. 3. Prikaz zavisnosti procenjene merne nesigurnosti

 ISBN 978-86-7466-969-3

VI. Zaključak

Izvršena je procena merne nesigurnosti transfera Hamonovog otpornika prenosnog odnosa 100:1 uz poznate tolerancije otpornika kojima se matematički realizuje transfer. Procena merne nesigurnosti vršena je na dva načina koristeći GUM metodu [1] i koristeći MCM metodu [2]. Prema GUM metodi jedna od najbitnijih činjenica je da li su uticajne veličine koje utiču na matematički model procenjenog transfera međusobno korelisane, kao i to da li je kod matematičkog modela transfera izražena nelinearnost. U slučaju kada se zanemari činjenica da je matematički model nelinearan, dobija se da je rezultantna merna nesigurnost jednaka nuli. Ovaj rezultat je doveo do zaključka da loša procena matematičkog modela može da dovede do loših zaključaka. Nakon sagledavanja modela kao vrlo nelinearnog, procenjena merna nesigurnost više nije bila jednaka nuli. Kod MCM metode, računarski su simulirane uticajne veličine sa definisanim funkcijama gustine verovatnoće i dobijene su procenjene merne nesigurnosti transfera. Treba napomenuti da je kod MCM metode pored merne nesigusrnosti transfera proračunata i vrednost samog transfera. Vrednost transfera prema MCM se razlikovala od broja n^2. U realnosti, za vrednost transfera se uzima da je jednaka baš broju n^2. Ukoliko bi se u realnosti merna nesigurnost procenjivala na osnovu MCM metode, može se zaboraviti na ovu činjenicu i samim tim opet dolaziti do pogrešnih zaključaka. Zbog ove činjenice u slučaju procene merne nesigurnost MCM metodom, potrebno je pored procenjene nesigurnosti proceniti i apsolutnu grešku odstupanja proračunatog transfera od broja n^2, pa tu grešku uvrstiti u obliku korekcije pri proceni krajnjeg rezultata. Rezultati GUM i MCM metode su prikazani u Tabeli 1, kao i na Slici 3. Može se videti da se rezultati razlikuju ali su po redu veličine veoma slični. Ovim rezultatim se potvrđuje da je procena matematičkog modela po GUM metodi prilično opravdana, a sa druge strane, da zanemarivanjem nekih činjenica može da se izvedu potpuno pogrešni zaključci. Jedna od najbitnijih stvari koje treba pomenuti vezano za Hamonov etalon je to da se njegov transfer realizuje sa mernom nesigurnošću koja je značajno manja od merne nesigurnosti samih otpornika koji čine taj etalon. Zbog ove činjenice, ovi etaloni nalaze veliku primenu u metrologiji električne otpornosti.

Zahvalnica

Ovo istraživanje (ovaj rad) je podržan(o) od strane Ministarstva nauke, tehnološkog razvoja i inovacija kroz projekat broj 451-03-47/2023-01/200156 "Inovativna naučna i umetnička istraživanja iz domena delatnosti FTN-a.

Literatura

[1] ”Evaluation of measurement data-Guide to the expression of uncertainty in measurement”, JCGM 100:2008

[2] “Evaluation of measurement data-Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement-Propagation of distributions using a Monte Carlo method”, JCGM 101:2008

[3] “SR-1010 Series Resistance Transfer Standards USer and Service Manual,” *IET LABS, INC.*, 534 Main Street, Westbury, NY 11590, November, 2008.

[4] R. Radetić, *Električna otpornost: pojava i merenja: sa originalnim rešenjima autora,* Agencija Eho, Niš, 2015.

[5] D. G. Jarrett, “Evaluation of Guarded High-Resistance Hamon Transfer Standards,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. *48,* no. *2,* April, 1999.

[6] B. V. Hamon, “A 1-100 Ω build-up resistor for the calibration of standard resistors”, *Jour. Sci. Instr.*, vol. 31, pp. 450-453, 1954.

[7] J. Bohacek, “Evaluation of frequency performance of resistance standards*”*, IMTC/2002. Proceedings of the 19th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2002.

[8] J. C. Riley, “The Accuracy of Series and Parallel Connections of Four-Terminal Resistors”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,,* vol. 16, 1967.

[9] White, D.R., Jones, K., Williams, J.M., Ramsey, I.E., “A simple resistance network for calibrating resistance bridges”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,,* vol. 46, 1997.

[10] L. Cimeanu, M. Simionescu, “Metrological characterization of reference standard resistors group of 100 Ω by means of Hamon resistor,” 2012 International Conference and Exposition on Electrical and Power Engineering, Iasi, Romania, 25-27 October, 2012.

Abstract

The aim of this paper is to estimate the measurement uncertainty of the transfer of Hamon standards using the GUM and Monte Carlo method. In previous research, it was found that the transfer is largely related to the number of resistors of Hamon’s standard and that the value of that transfer is known with great reliability from a metrological point of view. In the paper, an attempt was made to estimate the measurement uncertainty of the transfer value based on two methods, to compare those results and to draw useful conclusions that may be useful for future research.

Determination of the measurement uncertainty of the transfer of Hamon resistors

Stefan Mirković, Tatjana Grbić, Nemanja Gazivoda, Đorđe Novaković, Zdravko Gotovac, Dragan Pejić

 ISBN 978-86-7466-969-3