

Modeliranje i projektovanje prediktivnog upravljanje za helikopter sa tri stepena slobode

Boris Barišić, Aleksandar Rakić

Apstrakt—Razvoj bespilotnih letjelica i pratećih zakona upravljanja se može ubrojati u neke od najizazovnijih oblasti automatike. Danas je dostupan niz različitih skaliranih modela letjelica namijenjenih obrazovnim, naučnim i razvojnim centrima poput makete helikoptera sa tri stepena slobode kompanije Quanser. Takav helikopter je u ovom radu modelovan kao niz krutih segmenata spojenih zglobovima. Kinematski model ovakvog mehaničkog sistema je određen na bazi Denavit-Hartenbergovih (DH) parametara i odgovarajućih matrica homogenih transformacija. Nelinearne jednačine dinamike kretanja su izvedene primjenom Lagranževe mehanike, a uticaj pokretačkih motora predstavljen dejstvom generalisanih sila sračunatih na bazi virtuelnog rada. Linearizacijom tako dobijenog modela i njegovom predstavom u prostoru stanja stvoren je temelj za projektovanje prediktivnog zakona upravljanja na bazi modela. Uz posjedovanje kvalitetnog modela sistema možemo očekivati dobre rezultate prediktivnog upravljanja. Optimalno upravljanje minimizuje razmatrane linearne i kvadratne kriterijumske funkcije. Simulirani su odzivi nelinearnog modela regulisanog projektovanim zakonima upravljanja i izvršeno njihovo poređenje.

Ključne reči — helikopter sa tri stepena slobod, DH parametri, Lagranževa mehanika, prediktivno upravljanje na bazi modela

I. UVOD

Od formiranja prvih organizovanih oblika društvenih zajednica pa do danas smo svjedoci čestih sukoba među njima. Međutim, kamene oblutke, lukove i strijele su zamijenile najsavremenije vrste naoružanja, poput bespilotnih letjelica. Još 1915. godine je Nikola Tesla izložio svoje prve ideje o konstrukciji borbenih aviona bez posade.

Iako su razvijane prvenstveno za vojne potrebe, bespilotne letjelice su danas široko prisutne i u civilnoj upotrebi. Od onih koje možemo da kupimo u obližnjim prodavnicama tehnike pa do onih kakve su korištene 2011. godine za procjenu oštećenja nuklearne elektrane nakon zemljotresa i cunamija u Japanu. Bez obzira o kojoj vrsti njihove primjene da se radi osnovni konstrukcioni i upravljački koncepti se ne razlikuju mnogo od onih koji se koriste u proizvodnji helikoptera i aviona starijih generacija.

Za razliku od prvih bespilotnih letjelica koje su bile u potpunosti upravljane od strane čovjeka koji se nalazi u nekom komandnom centru na zemlji, danas je cilj obezbijediti što veći stepen njihove autonomije. U opštem smislu se pod ovim pojmom podrazumijeva sposobnost donošenja odluke bez ljudskog uticaja tj. kako da letjelica bude “pametna” i u stanju

da samostalno odlučuje. Pored razvoja niza tehnika učenja baziranih na različitim oblicima vještačke inteligencije kao i kompjuterske vizije, javlja se i veliki broj ograničenja na tom putu nezavisnosti letjelice u odlučivanju. Mnogo je vjerovatnije da će autonomija ostati zasnovana na razvoju algoritama teorije upravljanja sistemima.

Kompanija Quanser je razvila laboratorijsku maketu helikoptera čija je osnovna namjena realna simulacija leta i testiranje projektovanih zakona upravljanja [1]. Helikopter posjeduje tri stepena slobode kretanja i predstavlja izuzetno nelinearan, nestabilan i spregnut MIMO sistem. U literaturi su dostupni radovi sa različitim modelima i tipovima upravljanja ovim sistemom. Najveći broj njih je zasnovan na jednostavnim modelima koji uključuju samo osnovne nelinearne efekte sa širokim spektrom upravljačkih algoritama, od prediktivnih zakona upravljanja na bazi modela [2] do adaptivnih nelinearnih zakona upravljanja poput kliznog [3] ili fuzzy upravljanja [4]. Rijeđe, ali su dostupni i radovi koji se bave formiranjem složenih modela i identifikacijom parametara bez projektovanja kontrolera [5].

Zahvaljujući razvoju procesora i njihovih računskih sposobnosti zahtjevni zakoni upravljanja se uspješno izvršavaju u kratkom vremenskom periodu pa njihovo projektovanje na bazi složenih modela više ne mora biti ograničavajući faktor. Za formiranje modela sistema smo koristili tzv. pristup bijele kutije zasnovan na deduktivnom načinu razmišljanja i apriornom znanju. Posmatrajući dati sistem kao otvoreni kinematski lanac i primjenom zakona teorijske mehanike dolazi se do njegovog analitičkog modela koji predstavlja osnovu prediktivnog upravljanja. Prediktivno upravljanje na bazi modela je i kod nas poznato kao MPC od skraćenice za isti izraz na engleskom jeziku (Model Predictive Control). Ekstremizacija kriterijumske funkcije s ciljem pronalaska optimalnog upravljanja je rađena korištenjem tehnika matematičkog programiranja.

Ovaj rad se može podijeliti na četiri tematske cjeline. Nakon uvodnog u drugom poglavlju je opisana maketa helikoptera i formiran njen kinematski model. Izveden odgovarajući dinamički modela sistema, predstavljen modelom u prostoru stanja i izvršene njegova linearizacija i diskretizacija. U trećem poglavlju je projektovan prediktivni zakon upravljanja na bazi linearizovanog modela sa različitim kriterijumskim funkcijama. Četvrto poglavlje je posvećeno prikazu i diskusiji rezultata simulacija odziva nelinearnog modela sistema regulisanog ovim upravljačkim algoritmom.

Boris Barišić – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11020 Beograd, Srbija (e-mail: boris.barisic@etf.bg.ac.rs).

Aleksandar Rakić – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11020 Beograd, Srbija (e-mail: rakić@etf.bg.ac.rs).

II. MODEL SISTEMA

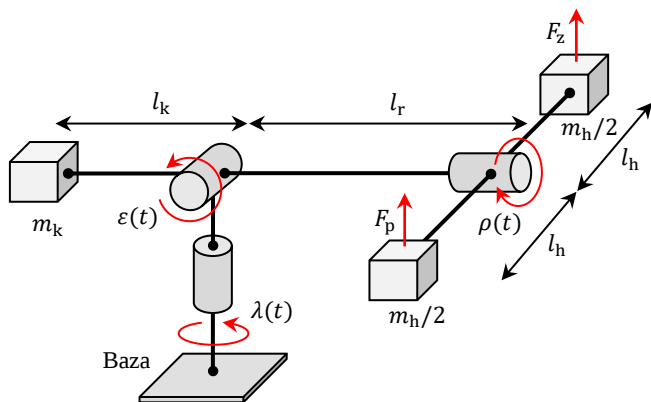
A. Opis makete helikoptera

Maketa helikoptera je izrađena po uzoru na helikoptere sa dvostrukim rotorom. Helikopter se sastoji od dva DC motora koji pogone elise i postavljeni su na krajevima pravougaonog okvira. Ose motora su paralelne, a sila potiska koju stvaraju normalna na okvir. Okvir je vezan na rotacioni zglobov koji je montiran na kraj ruke i može slobodno da se zarotira oko njega za neki ugao propinjanja ρ . Noseća ruka je pričvršćena na bazu pomoću zgloba sa dva stepena slobode. Ovaj zglobov omogućava helikopteru da se zarotira oko zamišljene vertikalne ose za neki ugao skretanja ili azimut λ kao i da se podigne ili spusti u vertikalnoj ravni za neki ugao valjanja ili ugao elevacije ε . Na drugom kraju ruke se nalazi kontrateg čija je uloga da smanji efektivnu masu helikoptera kako bi on mogao da se podigne djelovanjem sile koju stvaraju motori. Precizne informacije o pozicijama svih zglobova su dostupne zahvaljujući upotrebi enkodera visoke rezolucije [1].



Sl. 1. Slika laboratorijske makete helikoptera kompanije Quanser [1]

Opisani sistem smo modelovali kao niz krutih segmenata bez mase međusobno povezanih preko rotacionih zglobova bez inercije. Ovakva pretpostavka je opravdana jer je masa noseće ruke značajno manja od masa motora i kontratega, kao što su masa i dimenzije rotacionih zglobova zanemarljivi u odnosu na ostatak konstrukcije. Usvajili smo da se pogonski motori i kontrateg nalaze u istoj horizontalnoj ravni onda kada sistem miruje, a sila potiska koju stvaraju motori kompenzuje uticaj sila Zemljine teže.



Sl. 2. Mehanički model laboratorijske makete helikoptera.

Ukupnu masu helikoptera m_h tj. mase motora sa elisama smo podijelili i koncentrisali u dva bloka postavljena na pozicijama motora. Intenziteti sila potiska koje generišu prednji i zadnji motor su F_p i F_z . Ove sile djeluju na odgovarajuće blokove i uvijek su normalne na njihovu gornju stranu. Kao blok mase m_k je modelovan i kontrateg, iako su u nastavku sva tri posmatrana kao materijalne tačke.

Parametri ovako dobijenog mehaničkog modela su određeni na osnovu parametara laboratorijske makete dostupnih u [1] i prikazani u Tabeli I.

TABELA I
PARAMETRI MEHANIČKOG MODELA SISTEMA

Oznaka	Opis	Vrijednost	Jedinica
V_{min}, V_{max}	Opseg dozvoljenih vrijednosti napona na svakom motoru	$[-24, 24]$	V
K_m	Konstanta proporcionalnosti između napona na motoru i generisane sile potiska	0,1188	$\frac{V}{N}$
m_h	Masa helikoptera	1,15	kg
m_k	Masa kontratega	1,87	kg
l_h	Udaljenost između svakog motora i ose propinjanja	0,1778	m
l_r	Udaljenost između helikoptera i ose skretanja	0,6604	m
l_k	Udaljenost između kontratega i ose skretanja	0,4699	m
g	Gravitaciono ubrzanje	9,81	$\frac{m}{s^2}$

Prednjim i zadnjim motorom se u potpunosti kontroliše kretanje helikoptera. Ako se na prednji motor dovede pozitivan napon onda dolazi do zakretanja helikoptera za neki pozitivan ugao oko ose propinjanja. Ako je pozitivan napon doveden na zadnji motor tada je ugao propinjanja negativan. Dovođenjem pozitivnog napona na oba motora dolazi do podizanja helikoptera odnosno zakretanja oko ose elevacije. Dok god je ugao elevacije različit od nule helikopter će i da rotira oko zamišljene vertikalne ose [1].

B. Kinematski model sistema

Mehanički model sistema koji smo odredili se može posmatrati kao kinematski lanac robota. Pokretanjem jednog zgloba pomjera se i odgovarajući segment, a time i svi ostali segmenti koji se nalaze poslije njega prema vrhu kinematskog lanca, uključujući i posljednji segment tj. hvataljku. Naš model ne posjeduje klasičnu robotsku hvataljku ali svaki od blokova u odnosu na ostatak konstrukcije može imati njenu ulogu.

Neka je svakom segmentu dodjeljen koordinatni sistem koji je nepokretan u odnosu na svoj segment. Poznavajući tačan položaj svakog koordinatnog sistema, kao i vrijednosti unutrašnjih koordinata sistema tj. uglove zakretanja po svakoj od tri nezavisne ose kretanja, moguće je jednoznačno odrediti položaj robota. Na svaki od segmenata proizvoljno se može postaviti koordinatni sistem, međutim, zbog praktičnih razloga, usvojena je određena uniformnost u načinu njihovog postavljanja. Prihvaćena i najčešće korišćena notacija jeste Denavit-Hartenbergova koja položaj svakog koordinatnog sistema u odnosu na prethodni opisuje preko četiri parametra. Iz tog razloga se češće kaže da je kinematika modela opisana DH parametrima.

Najprije se u pravcu ose prvog zgloba koji je pričvršćen za podlogu postavlja osa z_0 . Bilo gdje na njoj se postavlja koordinatni početak baznog ili globalnog koordinatnog sistema koji je nepokretan i u odnosu na koji se izražava kretanje svih ostalih koordinatnih sistema. Ose x_0 i y_0 treba odrediti tako da sa z_0 formiraju desni koordinatni sistem. Duž osa obrtanja preostalih zglobova se postavljaju ose z_i za $i = 1, \dots, n$, gdje je n broj zglobova koji čine robotski lanac. S tim da osa z_n pripada koordinatnom sistemu hvataljke i postavlja se paralelno osi z_{n-1} . Možemo primijetiti da numeracija koordinatnih sistema kreće od nule što znači da je i -ti zglob prvi zglob i -tog segmenta dok je njemu odgovarajući koordinatni sistem $i - 1$ -vi. Dva susjedna koordinatna sistema O_{i-1} i O_i treba postaviti tako da je osa x_i normalna na osu z_{i-1} i da osa x_i siječe osu z_{i-1} . Tada se njihov međusobni položaj može opisati parametrima:

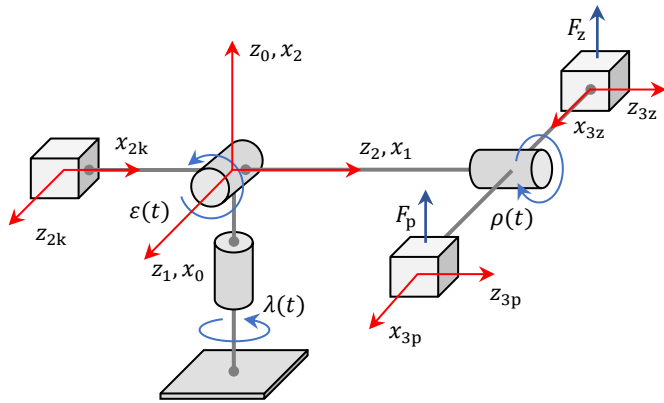
- a_i je rastojanje od ose z_{i-1} do z_i mjereno duž ose x_i
- α_i je ugao od ose z_{i-1} do z_i mjereno u ravni normalnoj na osu x_i
- θ_i je ugao između osa x_{i-1} i x_i mjereno u ravni normalnoj na osu z_{i-1}
- d_i je rastojanje od koordinatnog početka O_{i-1} do presjeka osa x_i i z_{i-1} mjereno duž ose z_{i-1} .

Parametar a_i se bira da bude pozitivan jer predstavlja dužinu segmenta, a preostala tri mogu imati vrijednosti različitog znaka [6], [7].

Prema tome, da bi se $i - 1$ -vi koordinatni sistem doveo do preklapanja sa i -tim potrebno je izvršiti sledeće transformacije:

$$H_{i-1}^i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \quad (1)$$

pri čemu H_{i-1}^i označava matricu homogene transformacije, Rot_{z,θ_i} i Rot_{x,α_i} rotaciju oko ose z , odnosno x , za ugao θ_i , odnosno α_i , a $Trans_{z,d_i}$ i $Trans_{x,a_i}$ translaciju duž ose z , odnosno x , za dužinu d , odnosno a_i .



Sl. 3. Postavljanje koordinatnih sistema za određivanje DH parametara.

Ako posmatramo kinematski lanac sačinjen od tri zgloba na čijem kraju se kao završni uređaji nalaze blokovi na koje djeluju sile potiska DH parametri takvog sistema su prikazani u Tabeli 2. Parametar a_i je pozitivan za DH parametre bloka koji predstavlja prednji motor helikoptera, a negativan za blok koji predstavlja zadnji motor.

TABELA II
DENAVIT-HARTENBERGOVI PARAMETRI MODELA

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90°	0	$90^\circ + \lambda$
2	0	90°	0	$90^\circ + \varepsilon$
3p,3z	$\pm l_h$	0	l_a	$90^\circ + \rho$

Na kinematiku kontratega ne utiče položaj trećeg zgloba pa se za određivanje DH parametara uzima u obzir kinematski lanac sačinjen od prva dva zgloba sa kontrategom kao završnim uređajem. Vrijednosti ovako određenih DH parametara su prikazani u Tabeli 3. pri čemu je parametar a_i negativan jer se kontrateg nalazi na suprotnoj strani kinematskog lanca od one na kojoj treba da se nađe hvataljka posmatranog robotskog sistema.

TABELA III
DENAVIT-HARTENBERGOVI PARAMETRI MODELA

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90°	0	$90^\circ + \lambda$
2k	$-l_w$	0	0	ε

Matrica homogene transformacije H_{i-1}^i je uvijek u formi

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0_{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdje je R_{i-1}^i matrica rotacije između $i - 1$ -vog i i -tog koordinatnog sistema, a d_{i-1}^i vektor položaja i -tog koordinatnog sistema izražen u odnosu na $i - 1$ -vi koordinatni sistem [6].

Koristeći relaciju (2) i prethodno određene DH parametre određujemo matrice homogenih transformacija između koordinatnih sistema vezanih za blokove sa masom i koordinatnog sistema baze, H_0^p , H_0^z i H_0^k , a na osnovu njih i vektore položaja blokova u baznom koordinatnom sistemu:

$$d_p = d_0^p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, d_z = d_0^z = \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \\ z_z \end{bmatrix}, d_k = d_0^k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sada kada su nam za proizvoljan položaj helikoptera poznati vektori položaja svih elemenata sistema koji posjeduju masu možemo formirati i dinamički model.

C. Dinamički model sistema

Za razliku od klasične Njutnove mehanike, Lagranževa mehanika nam omogućava određivanje dinamičkog modela sistema na osnovu energije i rada. Na ovaj način su automatski eliminisane sile interakcije između segmenata i ne pojavljuju se u jednačinama, a model se na sistematičan način dobija u zatvorenoj formi.

Vektori položaja blokova zavise isključivo od vrijednosti

uglova zakretanja helikoptera po pojedinim osama. S obzirom na to da je sa ovim uglovima λ, ε i ρ opisan položaj svake čestice u sistemu njih ćemo usvojiti za generalisane koordinate q_1, q_2 i q_3 , respektivno.

Ako sa T i U označimo ukupnu kinetičku i potencijalnu energiju sistema, tada izraz:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (4)$$

definiše Lagranžijan sistema.

Kao što smo i ranije pomenuli jedini elementi sa masom u sistemu su tri bloka koji modeluju helikopter i kontrateg, a koje posmatramo kao materijalne tačke. Na osnovu toga kinetička energija sistema je

$$T = \frac{1}{4} m_h (\dot{\mathbf{d}}_p^T \dot{\mathbf{d}}_p + \dot{\mathbf{d}}_z^T \dot{\mathbf{d}}_z) + \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{d}}_k^T \dot{\mathbf{d}}_k \quad (5)$$

a potencijalna

$$U = \frac{1}{2} m_h g (z_p + z_z) + m_k g z_k \quad (6)$$

Jednačine kretanja su date sa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad (7)$$

gdje su sa Q_j označene generalisane sile koje odgovaraju generalisanim koordinatama $q_j, j = 1, \dots, 3$.

Vrijednosti generalisanih sila se mogu odredi na osnovu virtuelnog rada koji izvrše spoljašnje sile nad sistemom [8]. Neka su $\mathbf{F}_p$ i $\mathbf{F}_z$ sile potiska koje djeluju na helikopter i koje su odgovarajućim rotacionim transformacijama izražene u odnosu na bazni koordinatni sistem. Virtuelni pomjeraji ovih blokova $\delta \mathbf{d}_p$ i $\delta \mathbf{d}_z$ pod dejstvom pomenutih sila su

$$\delta \mathbf{d}_p = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{d}_p}{\partial q_j} \delta q_j, \delta \mathbf{d}_z = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial q_j} \delta q_j \quad (8)$$

Rad sila na virtuelnim pomjerajima se definiše analogno radu na stvarnim pomjerajima [8]:

$$\delta A = \mathbf{F}_p \cdot \delta \mathbf{d}_p + \mathbf{F}_z \cdot \delta \mathbf{d}_z \quad (9)$$

gdje je sa „ $\cdot$ “ označen skalarni proizvod vektora. Ako se izraz (9) ispiše u razvijenoj formi on dobija oblik

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 \quad (10)$$

iz koga se prepoznaju generalisane sile Q_1, Q_2 i Q_3 .

Uobičajeno je da se prethodni skalarni proizvodi svedu na matrične. Izraz (8) možemo zapisati kao

$$\delta \mathbf{d}_p = \mathbf{J}_p \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{d}_z = \mathbf{J}_z \delta \mathbf{q} \quad (11)$$

gdje su sa $\mathbf{J}_p$ i $\mathbf{J}_z$ označene matrice

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial q_1} & \frac{\partial x_p}{\partial q_2} & \frac{\partial x_p}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y_p}{\partial q_1} & \frac{\partial y_p}{\partial q_2} & \frac{\partial y_p}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z_p}{\partial q_1} & \frac{\partial z_p}{\partial q_2} & \frac{\partial z_p}{\partial q_3} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_z}{\partial q_1} & \frac{\partial x_z}{\partial q_2} & \frac{\partial x_z}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y_z}{\partial q_1} & \frac{\partial y_z}{\partial q_2} & \frac{\partial y_z}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z_z}{\partial q_1} & \frac{\partial z_z}{\partial q_2} & \frac{\partial z_z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

poznate u teoriji robotskih sistema kao Jakobijan matrice. Sada je na osnovu (9) i (10) vektor generalisanih sila

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}_p^T \mathbf{F}_p + \mathbf{J}_z^T \mathbf{F}_z \quad (13)$$

Na ovom mjestu smo došli do nelinearnog modela sistema pomoću kog je u potpunosti opisana njegova dinamika. Jednačine su glomazne i složene pa ih ovdje nećemo navoditi.

D. Linearni model sistema

Predstavimo dobijeni nelinearni dinamički model jednačinama stanja tako što ćemo za promjenljive stanja usvojiti $\mathbf{x} = [\lambda, \dot{\lambda}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \rho, \dot{\rho}]^T$, za mjerene izlaze sistema $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, a za ulaze zbir i razliku sila potiska helikoptera $\mathbf{u} = [u_s, u_d]^T = [F_p + F_z, F_p - F_z]^T$. Naponi na prednjem i zadnjem motoru V_p i V_z su sa intenzitetima sila potiska povezani relacijama $F_p = K_m V_p$ i $F_z = K_m V_z$.

Za radanu tačku sistema u kojoj ćemo izvršiti linearizaciju biramo $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}_{6 \times 1}$ jer tada helikopter miruje u horizontalnom položaju. Stacionarno upravljanje za oba motora V_e koje nam ovo obezbjeđuje određujemo na osnovu izraza za ravnotežu svih momenata koji djeluju na sistem i ono ima vrijednost

$$V_e = \frac{(m_h l_r - m_k l_k) g}{2 l_r K_m} \quad (14)$$

Ponašanje helikoptera u okolini radne tačke sada možemo opisati linearnim modelom u prostoru stanja:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) \quad (15)$$

gdje je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.64 & 0.15 \\ 0 & 0 \\ -0.57 & -3.86 \end{bmatrix} \quad (16)$$

S obzirom da se upravljački algoritam izvršava u diskretnim trenucima vremena linearni model u prostoru stanja je diskretizovan primjenom tehnike step invarijantnosti.

$$\Delta \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{E} \Delta \mathbf{x}[k] + \mathbf{F} \Delta \mathbf{u}[k] \quad (17)$$

III. PREDIKTIVNO UPRAVLJANJE NA BAZI MODELA

Prediktivno upravljanje na bazi modela predstavlja zakon upravljanja određen minimizacijom neke unapred zadate kriterijumske funkcije, a za čiju minimizaciju nam je neophodno poznavanje modela sistema. Može se posmatrati kao izdvojen pristup u projektovanju kontrolera koji će u zavisnosti od tipa kriterijumske funkcije rezultovati u drugačije upravljanje.

Naš cilj je projektovati upravljanje tako da azimut λ i ugao elevacije ε prate referentne signale λ_{ref} i ε_{ref} . Vrijednosti upravljačkih signala su ograničene minimalnim i maksimalnim naponom koji može da se dovede na priključke motora. Uglovi ε i ρ su fizički ograničeni na vrijednosti $|\varepsilon| \leq \frac{\pi}{6}$ rad i $|\rho| \leq \frac{\pi}{4}$ rad. Ograničićemo i apsolutne vrijednosti signala greške $|e_\lambda| = |\lambda_{\text{ref}} - \lambda|$ i $|e_\varepsilon| = |\varepsilon_{\text{ref}} - \varepsilon|$ na one najveće koje se mogu javiti pri promjeni referentnih vrijednosti signala. Po šest linearnih jednačina ograničenja za svaki trenutak vremena proizilazi iz modela sistema u prostoru stanja.

U ovom radu su razmatrane dvije različite kriterijumske funkcije. Prva kriterijumska funkcija J_1 je u linearnoj formi i za cilj ima minimizaciju apsolutnih vrijednosti signala grešaka i minimizaciju potrošnje, a data je u formi

$$J_1 = \sum_{l=1}^N |e_\lambda[l]| + \alpha |e_\varepsilon[l]| + \beta |u_s[l-1]| + \gamma |u_d[l-1]| \quad (18)$$

Druga kriterijumska funkcija J_2 je u kvadratnoj formi i treba da minimizuje vrijednosti kvadrata signala grešaka i vrijednosti energije upravljačkih signala, a data je izrazom

$$J_2 = \sum_{l=1}^N e_\lambda^2[l] + \alpha e_\varepsilon^2[l] + \beta u_s^2[l-1] + \gamma u_d^2[l-1] \quad (19)$$

Sa N je označen horizont upravljanja. Parametari α , β i γ su uvedeni kao težinski koeficijenti koji definišu uticaj pojedinih elemenata na vrijednost kriterijumske funkcije. Za svaku od kriterijumskih funkcija ove četiri vrijednosti su podesive i od njih će da zavisi kvalitet regulacije. Ne postoje jasne preporuke za njihov odabir, osim iskustva projektanta. Vrijednosti koje smo mi podesili su prikazane u Tabeli 4.

TABELA IV
PARAMETRI KRIKERIJUMSKE FUNKCIJE

Parametar	J_1	J_2
N	60	40
α	40	100
β	0.5	0.009
γ	0.5	0.009

Sva ranije postavljena ograničenja su linearna, međutim kriterijumska funkcija J_1 nema linearnu formu. Kako bismo mogli da primijenimo tehnike linearnog programiranja za pronalazak optimalnog upravljanja svaku od promjenljivih unutar kriterijumske funkcije možemo predstaviti na sledeći način:

$$|p| = |p^+ - p^-| \leq |p^+| + |p^-| = p^+ + p^- \quad (20)$$

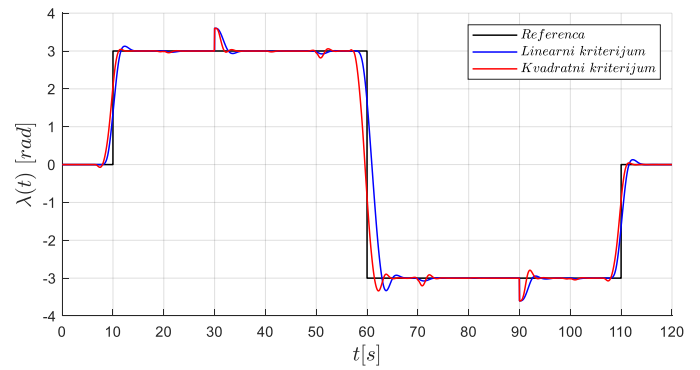
gdje je sa p označena proizvoljna promjenljiva, a sa p^+ i p^- novouvedene pozitivne promjenljive. Može se pokazati da u optimalnom rješenju ove dvije promjenljive nikada nisu istovremeno različite od nule, pa minimizacijom njihovog zbira zapravo se minimizuje $|p|$. Kriterijumska funkcija J_2 odgovara kvadratnoj formi pa njena minimizacija uz linearna ograničenja odgovara problemu kvadratnog programiranja.

Kako bismo što bolje iskoristili mogućnosti prediktivnog upravljanja baziranog na modelu, pretpostavili smo da je način promjene reference unapred poznat upravljačkom algoritmu. Ova pretpostavka je opravdana za potrebe bespilotnih letjelica jer uglavnom treba da isprate unapred isplaniranu trajektoriju.

IV. REZULTATI I DISKUSIJA

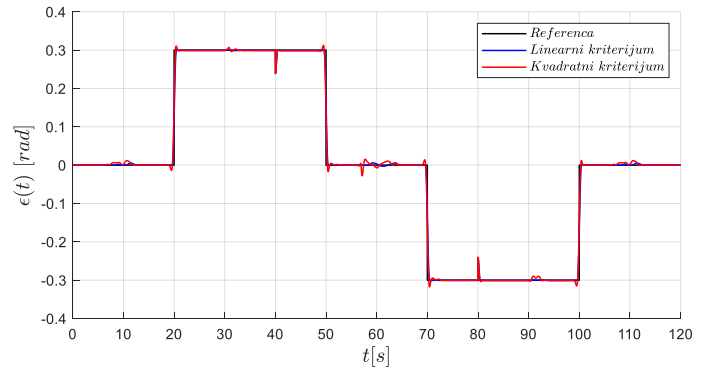
Sve simulacije odziva sistema na projektovani zakon upravljanja smo vršili na nelinearnom dinamičkom modelu sistema jer ne posjedujemo laboratorijsku maketu helikoptera.

Na slici 4. je prikazan regulisani azimut λ tokom vremena za obe korištene kriterijumske funkcije.



Sl. 4. Regulisani azimut λ u zavisnosti od vremena i korištene kriterijumske funkcije.

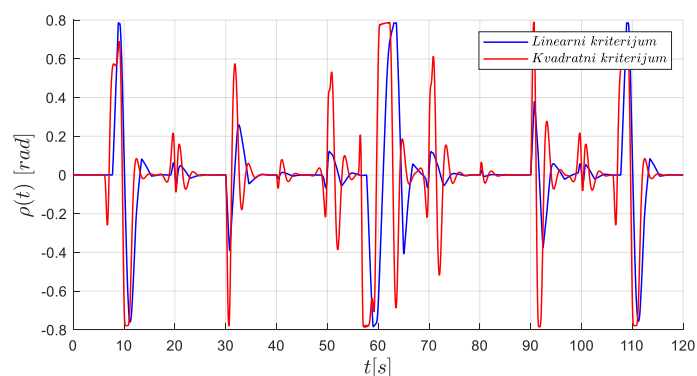
Odziv regulisanog ugla elevacije ε tokom vremena i za linearnu i za kvadratnu kriterijumsku funkciju je prikazan na slici 5.



Sl. 5. Regulisani ugao elevacije ε u zavisnosti od vremena i korištene kriterijumske funkcije.

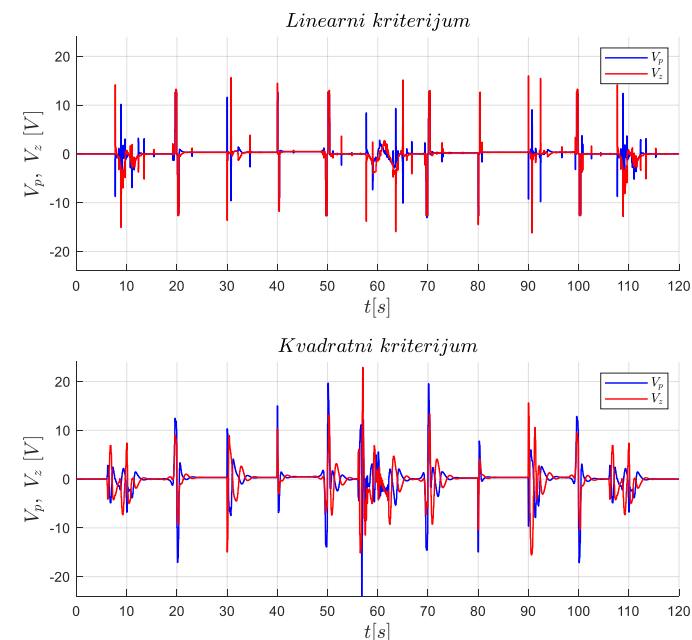
Sa prikazanih grafika vidimo da obe regulisane varijable uspješno prate zadate reference. Kao što je i očekivano zakon upravljanja bez problema otklanja poremećaje odskočnog tipa čije je djelovanje svedeno na izlaz sistema. Kao što smo ranije pominjali radi se o veoma spregnutom sistemu pa se može primijetiti da se pri promjeni referentne vrijednosti jedne pormjenljive javljaju blagi poremećaji u regulaciji druge, a koje upravljački algoritam uspješno kompenzuje.

Promjene azimuta λ i ugla elevacije ε su posljedica djelovanja prednjeg i zadnjeg motora helikoptera odnosno promjene položaja ugla propinjanja ρ . Ovaj ugao u zavisnosti od vremena i kriterijumske funkcije je prikazan na slici 6. Ranije smo rekli da je ugao ρ i fizički ograničen samom mehaničkom konstrukcijom modela pa je ovim ograničenjem u najvećoj mjeri ograničena i brzina promjene azimuta λ .



Sl. 6. Neregulirani ugao propinjanja ρ u zavisnosti od vremena i korištene kriterijumske funkcije.

Sila potiska koju generišu motori helikoptera zavisi od napona na njihovom rotoru, a promjena napona u vremenu na oba motora je prikazana na slici 7.



Sl. 7. Napon na prednjem V_p i zadnjem motoru V_z u zavisnosti od vremena i korištene kriterijumske funkcije.

V. ZAKLJUČAK

U ovom radu je analizirana laboratorijska maketa helikoptera, izveden je njen dinamički model, a zatim i projektovano prediktivno upravljanje na bazi dobijenog modela za različite kriterijumske funkcije. Odabir kriterijumske funkcije i njenih parametara nam je pokazao da poboljšavanje jednih performansi utiče na narušavanje ostalih i da se od projektanta očekuje da pronađe odgovarajući kompromis u skladu sa konkretnom primjenom zakona upravljanja.

U cilju daljeg unapređenja ovog rada, ima smisla testirati projektovani upravljački zakon na realnom sistemu i izvršiti poređenje rezultata sa onima dobijenim na bazi jednostavnih modela.

ZAHVALNICA

Ovaj rad je finansijski podržalo Ministarstvo nauke, tehnološkog razvoja i inovacija Republike Srbije po ugovoru broj: 451-03-47/2023-01/200103.

LITERATURA

- [1] J. Apkarian, M. Levis and C. Fulford, "3 DOF Helicopter Experiment for Matlab/Simulink users", *Quanser laboratory guide*, Markham (Ontario), Canada, 2012.
- [2] J. Zhang, X. Cheng and J. Zhu, "Control of a laboratory 3-DOF helicopter: Explicit model predictive approach", in *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14.2: pp. 389-399, 2016.
- [3] M. Odelga, A. Chiette and F. Plestan, "Control of 3 DOF helicopter: a novel autopilot scheme based on adaptive sliding mode control" in *2012 American Control Conference (ACC)*, pp. 2545-2550, IEEE, 2012.
- [4] S. Naderi, M. J. Blondin and B. Rezaie, "Optimizing an adaptive fuzzy logic controller of a 3-DOF helicopter with a modified PSO algorithm" in *International Journal of Dynamics and Control*, pp. 1-19, 2022.
- [5] S. Rajappa, A. Chiette, R. Chandra, and W. Khalil, "Modelling and dynamic identification of 3 DOF Quanser helicopter", in *16th International Conference on Advanced Robotics*, pp. 1-6, IEEE, 2013.
- [6] B. Borovac, G. Đorđević, M. Raković i M. Rašić, *Industrijska robotika*, 1. izdanje, Novi Sad, Srbija, Fakultet tehničkih nauka, 2017.
- [7] J. J. Craig, "Manipulator kinematics", *Introduction to robotics – meachanics and control*, 3rd ed, ch. 3, pp. 62-100, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River (New Jersey), USA, 2005.
- [8] V. Radovanović, *Teorijska mehanika*, skripta, Beograd, Srbija, FF, 2020.

ABSTRACT

The development of unmanned aerial vehicles and following control law can be considered one of the most challenging fields in automation. A variety of different scaled models are available today to educational, scientific, and development centers. One of them is a helicopter model with three degrees of freedom, developed by the Quanser company. Such a helicopter was modeled in this paper as a chain of rigid links connected by joints. The kinematic model of this mechanical system is determined based on the Denavit-Hartenberg parameters and appropriate matrices of homogenous transformations. Nonlinear equations of the movement dynamics are derived using Lagrangian mechanics, and the effect of drive motors is represented as the influence of generalized forces calculated based on virtual work. By linearizing such a model and its representation in the state space, a foundation was made for designing a model-based predictive control. With quality model we can expect good results of a predictive control. The optimal control minimizes considered linear and squared criteria. Responses of the nonlinear model regulated using the designed control laws were simulated, and their comparison was given.

Modeling and Designing Model Based Predictive Control of a Helicopter with Three Degrees of Freedom

Boris Barišić, Aleksandar Rakić