Ublažavanje četeringa digitalnog regulatora promenljive strukture za linearne sisteme

Boban Veselić, *Senior Member, IEEE,* Čedomir Milosavljević, Branislava Peruničić-Draženović, *Senior Member, IEEE,* Senad Huseinbegović, *Member, IEEE,* Milutin Petronijević, *Member, IEEE*

***Apstrakt*—U radu se ispituje mogućnost smanjenja četeringa u kliznom režimu jednog digitalnog regulatora promenljive strukture namenjenog za linearne sisteme sa ograničenim upravljačkim ulazom. Nelinearna diskontinualna funkcija relejnog tipa, koja je sastivni deo originalnog zakona upravljanja, zamenjena je adekvatnom kontinualnom aproksimacijom. Analizirana je stabilnost modifikovanog sistema i istaknute su uočene osobine sistema. Dobijeni teorijski zaključci su potvrđeni simulacionom proverom na numeričkom primeru.**

***Ključne reči*—Sistemi upravljanja promenljive strukture, diskretni klizni režimi, četering, kompenzacija poremećaja.**

I. Uvod

Sistemi upravljanja promenljive strukture (SUPS) [1] u radnom kliznom režimu (KR) [2] su jedna od popularnih robusnih nelinearnih tehnika upravljanja, teorijski invarijantni, u idealnom KR, na parametarske i spoljne poremećaje koji deluju u kanalu upravljanja [3]. Za ovu osobinu je potrebno diskontinualno upravljanje na kliznoj površi sa mogućnošću ostvarivanja beskonačne frekvencije prekljčivanja upravljačkih struktura. Iz tih razloga, zakoni upravljanja u KR sadrže diskontinualnu komponentu, najčešće relejnog tipa. U praktičnim realizacijama se osobina invarijantnosti redukuje u veliku robusnost sistema, upravo zbog realno ostvarljive visoke, ali konačne frekvencije prekljčivanja usled neidealnosti prekidačkih elemenata.

Glavna prepreka široke primene SUPS sa KR je pojava visokofrekvencijskih oscilacija u KR, poznatih kao četering, što je neprihvatljivo u nekim sistemima poput mehaničkih. Ovaj neželjeni efekat nastaje usled diskontinualne prirode upravljanja i postojanja neizbežne nemodelovane (parazitne) dinamike, koja se pobuđuje takvim upravljanjem i generiše četering.

U literaturi su predložene različite metode za ublažavanje četeringa u KR. Jedan od prvih pristupa [4] podrazumeva da se diskontinualna signum funkcija u upravljanju zameni kontinualnom nelinearnošću tipa zasićenja sa velikim pojačanjem, što za posledicu ima smanjenje robusnosti budući da pojačanje u sistemu postaje konačno. Drugi pristup je uvođenje opservera stanja [5], preko koga se zatvara petlja u kojoj ne egzistira četering. Petlja sa opserverom je idealna (nema nemodelovanu dinamiku) te nema četeringa u njoj pa služi kao bajpas za četering. Međutim, varijacije parametara sistema narušavaju robusnost i performanse sistema. Klizni režimi višeg reda (KRVR) [6], noviji pristup dosta popularan poslednju deceniju, su nastali u nastojanju rešavanja problema četeringa. Za nastanak KR r-tog reda potreno je da relativni red sistema u odnosu na kliznu promenljivu bude r, pa se tek u r-tom izvodu klizne promenljive javlja diskontinualno upravljanje. Naročitu pažnju je privukao tzv. super-twisting algoritam (STA) [6], razvijen za kontinualne sisteme sa jednim ulazom, koji ostvaruje KR drugog reda. Međutim, na osnovu analiza sprovedenim u [7-9] može se zaključiti da KRVR mogu ostvariti manji četering u odnosu na konvencionalne KR samo u sistemima sa dovoljno brzim aktuatorima. Dodatna redukcija četeringa se može ostvariti adekvatnim podešavanjem kontinualne aproksimacije signum funkcije u regulatorima promenljive strukture [10].

Digitalna implementacija upravljačkih algoritama uz pomoć mikroprocesora je otvorila analizu KR u vremenski diskretnom domenu [11]-[15]. Pokazano je da je samo u nominalnom sistemu moguće ostvariti diskretni KR, i pri tome upravljanje ne mora biti diskontinualno. U svim ostalim slučajevima moguće je ostvariti samo tzv. kvazi-KR (KKR), gde se kretanje sistema odvija u nekoj bliskoj okolini oko klizne površi. Kako vremenski diskretno upravljanje unosi dodatno kašnjenje u sistem, četering je izraženiji u slučaju diskretnih KR. Jedan od načina da se eliminiše ova pojava je da se u okolini klizne površi primeni linearno upravljanje [16], što će naravno dovesti do gubitka robusnosti sistema u toj zoni. U slučaju primene ove strategije, potrebno je izvršiti eventualnu kompenzaciju poremećaja u sistemu u cilju povećanja tačnosti. Za sporopromenljive poremećaje, kompenzaciona upravljanja su predložena u [17-19], koja imaju linearni karakter. U radu [20] je predložen digitalni regulator promenljive strukture sa nelinearnim kompezatorom poremećaja za linearne sisteme sa ograničem upravljačkim signalom. Predložena upravljačka struktura podseća na diskretizovanu varijantu STA upravljanja [21], ali indukuje manji četering.

U ovom radu se upravo polazi od digitalnog regulatora promenljive strukture [20], čije je upravljanje u okolini klizne

Boban Veselić i Milutin Petronijević – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, Srbija (e-mail: boban.veselic@elfak.ni.ac.rs, milutin.petronijevic@elfak.ni.ac.rs).

Čedomir Milosavljević – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Istočno Sarajevo, Bosna i Hercegovina (e-mail: cedomir.milosavljevic@elfak.ni.ac.rs).

Branislava Peruničić-Draženović i Senad Huseinbegović – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, Bosna i Hercegovina (e-mails: brana_p@hotmail.com, shuseinbegovic@etf.unsa.ba).

Ovaj rad je podržan od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

površi linearno i potpomognuto je kompenzacionim članom. Dopunska kompenzaciona upravljačka komponenta se formira nelinearnom estimacijom poremećaja, koja se dobija integracijom signuma klizne promenljive. Kako kompenzacioni deo regulatora ipak sadrži diskontinualnu funkciju, može doći do indukovanja četeringa. Iz tih razloga, u ovom radu se ispituje primena određene kontinualne aproksimacije signum funkcije sa ciljem ublažavanja četeringa, kao i njeni efekti na performanse sistema u pogledu stabilnosti i tačnosti. Određena je oblast konvergencije modifikovanog upravljačkog sistema i pokazano da se adekvatnim izborom parametra kontinualne aproksimacije može suziti širina kvazi-klizne oblasti u slučaju sporopromenljivih poremećaja u odnosu na originalni algoritam. Dobijeni teorijski rezultati su verifikovani simulacionim ispitivanjima.

II. OPIS DIGITALNOG REGULATORA PROMENLJIVE STRUKTURE

Posmatra se linearni kontinualni sistem upravljanja koji je opisan modelom u prostoru stanja

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(u(t) + d(t)), \tag{1}$$

gde je $x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ vektor stanja, $u \in \mathbb{R}$ je upravljački signal, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ su matrice stanja i ulaza, respektivno. Na sistem deluje ograničeni poremećaj d, $|d(t)| \le d_0 < \infty$, koji zadovoljava uslove poklapanja, tj. deluje u prostoru upravljanja. Za realizaciju digitalnog regulatora potrebno je izvršiti vremensku diskretizaciju modela (1). Vremenski diskretni model sistema je oblika

$$x_{k+1} = A_d x_k + b_d(u_k + d_k), \tag{2}$$

$$A_d = e^{AT},\, b_d = \int_0^T e^{At} B dt, \tag{3}$$

pod pretpostavkom da je perioda diskretizacije T dovoljno mala i da su poremećaji u sistemu sporopromenljivi. Tada se poremećaj može smatrati konstantnim između dva uzastopna trenutka odabiranja, što za posledicu ima očuvanje uslova poklapanja u diskretnom domenu.

Da bi se ostvario KR željene dinamike potrebno je da se najpre dizajnira odgovarajuća klizna površ, a da se potom nađe upravljanje koje uspostavlja KR. Kretanje sistema se tada može dekomponovati na dve faze: fazu dosezanja klizne površi i fazu klizanja po datoj površi. Za svaku od ovih faza vezana je odgovarajuća upravljačka komponenta.

Pristup koji omogućava jasno razdvajanje komponenti upravljanja za dosezanje i klizanje bazira se na korišćenju diskretnog modela sistema koji je dobijen primenom δ-transformacije, [16]. Matematički model sistema (1) u δ-domenu se dobija korišćenjem modela (2) na sledeći način.

$$\delta x_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{T} = A_\delta x_k + b_\delta(u_k + d_k), \tag{4}$$

$$A_\delta = (A_d - I_n)/T,\, b_\delta = b_d/T. \tag{5}$$

KR treba organizovati po površi $s_{\delta,k} = 0$ u prostoru stanja, gde se klizna promenljiva u δ-domenu definiše kao

$$s_{\delta,k} = c_\delta x_k,\, c_\delta b_\delta = 1. \tag{6}$$

Željene sopstvene vrednosti sistema su definisane spektrom u kontinualnom domenu

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{n-1} \quad 0], \tag{7}$$

pri čemu nulta sopstvena vrednost ukazuje da je dinamika sistema u kliznom režimu redukovanog reda, tj. $n-1$ reda. Nenulte sopstvenene vrednosti se mogu preslikati u δ-domen na osnovu (5) kao $\lambda_{\delta i} = (e^{\lambda_i T} - 1)/T$, $i = 1, \cdots, n-1$, dok nulta sopstvena vrednost ostaje nepromenljiva. Spektar u δ-domenu je sada definisan sa

$$\lambda_\delta = [\lambda_{\delta,1} \quad \lambda_{\delta,2} \quad \cdots \quad \lambda_{\delta,n-1} \quad 0]. \tag{8}$$

Formula za nalaženje vektora klizne površi [22], u ovom slučaju postaje

$$c_\delta = [k_{\delta e} \quad 1] \cdot [A_\delta \quad b_\delta]^\dagger, \tag{9}$$

gde je $k_{\delta e}$ vector pojačanja povratne sprege po stanju koji obezbeđuje spektar (8) u sistemu (4), dok operator † označava pseudo-inverziju matrice.

Na osnovu (6) i (4) sledi da je

$$\delta s_{\delta,k} = \frac{s_{\delta,k+1} - s_{\delta,k}}{T} = c_\delta \delta x_k = c_\delta A_\delta x_k + u_k + d_k. \tag{10}$$

Ekvivalentno upravljanje u δ-domenu se određuje rešavanjem uslova $s_{\delta,k+1} = 0$ po upravljanju u_k, te se korišćenjem prethodne jednačine dobija

$$u_{eq,k} = -c_\delta A_\delta x_k - \frac{s_{\delta,k}}{T} - d_k. \tag{11}$$

Član $s_{\delta,k}/T$ u upravljanju je zadužen za fazu dosezanja, i postaje jednak nuli kada sistem dođe na kliznu površ. Ovom komponentom može da se utiče na fazu dosezanja.

Ostvarljiv deo ekvivalentnog upravljanja (11) je

$$u_k = -c_\delta A_\delta x_k - \frac{s_{\delta,k}}{T} = -(k_{\delta e} + \frac{1}{T} c_\delta) x_k. \tag{12}$$

Zadatak upravljanja je obezbediti brz odziv bez preskoka i značajnu robusnost na poremećaje u sistemu. Takođe treba uzeti u obzir neizbežno postojanje zasićenja u aktuatorima, što uslovljava ograničavanje upravljačkog signala regulatora po amplitudi. Navedeni zahtevi su ostvareni digitalnim regulatorom promenljive strukture sa kliznim režimom [20]. Upravljačka strategija ovog regulatora se sastoji iz dva režima rada. U prvoj fazi, kada je stanje sistema udaljeno od klizne površi, deluje linearno upravljanje sa zadatkom da dovede stanje sistema u blisku okolinu klizne površi koja zavisi od amplitude poremećaja koji deluje. Nakon toga se aktivira nelinearna kompenzacija poremećaja koja ojačava linearnu upravljačku komponentu. Na taj načine se izbegava preskok i pojava integratorskog zamaha usled postojanja nelinearnosti tipa zasićenja.

Zakon upravljanja [20] je opisan sledećim jednačinama:

$$u_k = \begin{cases} U_0 \operatorname{sgn}(u_{\Sigma,k}), & |u_{\Sigma,k}| > U_0 \\ u_{\Sigma,k}, & |u_{\Sigma,k}| \le U_0 \end{cases}, \tag{13a}$$

$$u_{\Sigma,k} = u_{l,k} - p_{2,k} u_{c,k}, \tag{13b}$$

$$u_{l,k} = -c_\delta A_\delta x_k - T^{-1}\left[k_{s1} + \left(1 - p_{2,k}\right) k_{s2}\right] s_{\delta,k}, \tag{13c}$$

$$u_{c,k} = u_{c,k-1} + k_{int} T \operatorname{sgn}(s_{\delta,k-1}) \tag{13d}$$

$$p_{1,k} = \begin{cases} 0, |u_{\Sigma,k}| > U_0 \\ 1, |u_{\Sigma,k}| \le U_0 \end{cases}, \tag{13e}$$

$$p_{2,k} = p_{1,k-1}, \tag{13f}$$

$$k_{s1}, k_{s2} > 0, k_{s1} + k_{s2} \le 1. \tag{13g}$$

Može se primetiti da se ukupno upravljanje $u_{\Sigma,k}$ sastoji iz dve komponente: linearne $u_{l,k}$ i nelinearne (kompenzacione) $u_{c,k}$. Kada je stanje sistema daleko od klizne površi, izlaz regulatora u_k je u zasićenju jer linearno upravljanje teži da dovede sistem na kliznu površ u nominalnom slučaju. Izračunato upravljanje $u_{\Sigma,k}$ je velike amplitude koja se onda limitira na U_0, vrednost koja je prihvatljiva za aktuator. Nakon izlaska regulatora iz zasićenja primenjuje se linearno upravljanje

$$u_{l,k} = -c_\delta A_\delta x_k - T^{-1}(k_{s1} + k_{s2})s_{\delta,k} \tag{14}$$

u trajanju od jedne periode diskretizacije. Ovaj mehanizam je ostvaren pomoćnim promenljivama $p_{1,k}$ $p_{2,k}$. U graničkom slučaju kada su pojačanja $k_{s1} + k_{s2} = 1$, upravljanje (14) postaje tzv. dead-beat upravljanje koje daje $s_{\delta,k+1} = 0$ u slučaju nominalnog sistema ($d_k = 0$). U realnom sistemu uzima se da je $k_{s1} + k_{s2} \leq 1$ pošto je $d_k \neq 0$ (uključujući i nemodelovanu dinamiku) da bi se podesila širina kvazi-kliznog domena. Ovakvo upravljanje dovodi stanje sistema u neku okolinu klizne površi. U sledećoj periodi diskretizacije redukuje se pojačanje linearnog dela upravljanja i aktivira se nelinearna komponenta, tako da se tada upravljanje definiše realacijama

$$u_k = -c_\delta A_\delta x_k - T^{-1}k_{s1}s_{\delta,k} - u_{c,k}, \tag{15}$$

$$u_{c,k} = u_{c,k-1} + k_{int}T\mathrm{sgn}(s_{\delta,k-1}). \tag{16}$$

Komponenta upravljanja $u_{c,k}$ je izlaz diskretnog integratora sa pojačanjem k_{int} koja teži da kompenzuje dejstvo poremećaja. Dakle, (16) sprovodi nelinearnu estimaciju poremećaja. Na ulaz integratora se dovodi signum funkcija klizne promenljive.

Stabilnost sistema podrazumeva konvergenciju trajektorija sistema ka kliznoj površi u oba režima rada regulatora, u zasićenju i van zasićenja. U [20] su izvedeni uslovi stabilnosti sistema, dati kroz dva tvrđenja. Prvo tvrđenje se odnosi na potrebnu veličinu limita izlaza regulatora.

Tvrđenje 1: Diskretni sistem (4) sa regulatorom (13) koji radi u režimu zasićenja će napustiti ovaj režim za konačan broj perioda uzorkovanja ukoliko važi da je

$$U_0 > |c_\delta A_\delta x_k| + d_0, \forall k \geq 0. \tag{17}$$

Drugo tvrđenje sagledava uslove konvergencije nakon izlaska regulatora iz režima zasićenja.

Tvrđenje 2: Uslovi konvergencije diskretnog sistema (4) sa regulatorom (13), koji radi van režima zasićenja i ima parametre $0 < k_{s1} \leq 1$ i $k_{int} > 0$, će biti ispunjeni unutar oblasti definisane sa

$$|s_{\delta,k}| > \frac{k_{int}T^2}{k_{s1}}. \tag{18}$$

Iz ovog uslova se vidi da za konačno malo T postoji uska oblast oko klizne površi u kojoj ne postoji konvergencija trajektorija ka kliznoj površi i koja utiče na širinu kvazi-klizne oblasti. Može se zaključiti da je prilikom projektovanja sistema poželjno ostvariti što je moguće manje T, jer ne postoji bojazan generisanje prevelikog upravljanja i potencijalne nestabilnosti usled postojanja limitera na izlazu regulatora.

III. UBLAŽAVANJE ČETERINGA

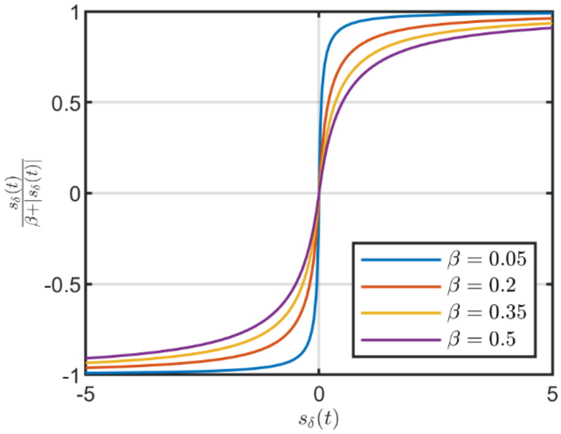
Relacije (15) i (16) opisuju rad regulatora (13) u željenom režimu rada van zasićenja. U estimatoru poremećaja (16) figuriše diskontinualna funkcija. Iako diskontinualni signal $\mathrm{sgn}(s_{\delta,k-1})$ prolazi kroz integrator, diskretna realizacija integratora ne može u potpunosti da isfiltrira ovaj signal. Zato ovakav estimator ipak predstavlja izvor četeringa u sistemu.

U ovom radu se ispituje mogućnost dalje redukcije četeringa zamenom diskontinualne signum funkcije u (13d), odnosno (16), nekom kontinualnom aproksimacijom. Kako se signum funkcija može opisati relacijom $\mathrm{sgn}(s_{\delta,k}) = s_{\delta,k}/|s_{\delta,k}|$, ideja je da se primeni u (16) sledeća kontinualna aproksimacija

$$u_{c,k} = u_{c,k-1} + k_{int}T\frac{s_{\delta,k-1}}{\beta + |s_{\delta,k-1}|}, \beta \geq 0. \tag{19}$$

Uticaj parametra β na oblik aproksimacije je prikazan na Sl. 1. Očigledno je da za $\beta = 0$, (19) se svodi na (16), tj. nema aproksimacije.

Nakon uvođenja kontinualne aproksimacije, potrebno je analizirati stabilnost i performanse sistema. Najpre se posmatra rad regulatora (13) sa aproksimacijom (19) u režimu zasićenja. Kako tada aproksimacija (19) nije aktivna i upravljanje je maksimalne amplitude $u_k = U_0\mathrm{sgn}(u_{\Sigma,k})$, uvođenje aproksimacije nema uticaj na ovaj režim, te i dalje važe uslovi (17). Dalje treba analizirati rad sistema van zasićenja upravljačkog signala.



Sl. 1. Izgled kontinualne aproksimacija funkcije $\mathrm{sgn}(s_{\delta,k})$ za različite vrednosti parametra $\beta > 0$.

Nakon izlaska upravljanja iz zasićenja, na osnovu zakona (13) u narednoj periodi diskretizaije deluje upravljanje

$$u_k = -c_\delta A_\delta x_k - T^{-1}(k_{s1} + k_{s2})s_{\delta,k}, \tag{20}$$

pa $\delta s_{\delta,k}$ postaje

$$\delta s_{\delta,k} = -T^{-1}(k_{s1} + k_{s2})s_{\delta,k} + d_k. \tag{21}$$

Pošto je $\delta s_{\delta,k} = T^{-1}(s_{\delta,k+1} - s_{\delta,k})$, iz prethodne jednačine se može naći $s_{\delta,k+1}$ kao

$$s_{\delta,k+1} = (1 - k_{s1} - k_{s2})s_{\delta,k} + Td_k. \tag{22}$$

Važno je primetiti da se u graničnom slučaju ($k_{s1} + k_{s2} = 1$) dobija $s_{\delta,k+1} = Td_k$, što ukazuje da ovo upravljanje dovodi sistem u $O(T)$ okolinu klizne površi, čije dimenzije zavise i od amplitude poremećaja. Ukoliko nema poremećaja ($d_k = 0$), dobija se $s_{\delta,k+1} = 0$ te je ovo upravljanje ustvari ekvivalentno upravljanje koje ostvaruje dead-beat odziv.

Već u narednoj periodi diskretizacije, pojačanje regulatora se redukuje ($k_{s2} = 0$) i aktivira se kompenzaciono upravljanje $u_{c,k}$ (19). Izlaz regulatora se sada formira na osnovu jednačina

$$u_k = -c_\delta A_\delta x_k - T^{-1}k_{s1}s_{\delta,k} - u_{c,k}, \tag{23}$$

$$u_{c,k} = u_{c,k-1} + k_{int}T\frac{s_{\delta,k-1}}{\beta + |s_{\delta,k-1}|}, \tag{24}$$

pa se dinamika klizne promenljive opisuje sa

$$s_{\delta,k+1} = (1 - k_{s1})s_{\delta,k} + T(d_k - u_{c,k}), \tag{25}$$

$$u_{c,k+1} = u_{c,k} + k_{int}T\frac{s_{\delta,k-1}}{\beta + |s_{\delta,k-1}|}. \tag{26}$$

Kompenzaciono upravljanje $u_{c,k}$ ustvari predstavlja estimaciju poremećaja. Ako se uvede greška estimacije kao $z_k = d_k - u_{c,k}$, dinamika sistema (25), (26) se može izraziti kao

$$s_{\delta,k+1} = (1 - k_{s1})s_{\delta,k} + Tz_k, \tag{27}$$

$$z_{k+1} = -k_{int}T\frac{s_{\delta,k-1}}{\beta + |s_{\delta,k-1}|} + z_k + \Delta_k, \tag{28}$$

gde je $\Delta_k = d_{k+1} - d_k$.

Stabilnost nelinearnog sistema (27), (28) se može analizirati korišćenjem pseudo-linearne forme [21], [23], što u ovom slučaju daje sledeći model

$$\sigma_{k+1} = \Lambda(s_{\delta,k})\sigma_k + p_k, \tag{29}$$

$$\sigma_k = \begin{bmatrix} s_{\delta,k} \\ z_k \end{bmatrix},\ \Lambda(s_{\delta,k}) = \begin{bmatrix} 1 - k_{s1} & T \\ \frac{-k_{int}T}{\beta + |s_{\delta,k}|} & 1 \end{bmatrix},\ p_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_k \end{bmatrix}$$

Karakteristična jednačina pseudo-linearnog sistema (29) se nalazi iz uslova $F(z) = \det(zI - \Lambda) = 0$, iz koga se dobija

$$F(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0(s_{\delta,k}) = 0, a_2 > 0, \tag{30}$$

$$a_2 = 1, a_1 = k_{s1} - 2, a_0 = 1 - k_{s1} + \frac{k_{int}T^2}{\beta + |s_{\delta,k}|}.$$

Uslovi stabilnosti sistema se mogu odrediti primenom Džurijevog testa stabilnosti, koji se za sistem drugog reda (29) svodi na zahteve $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ i $|a_0| < a_2$. Za karakterističnog polinoma (30), ovi uslovi su sledeće relacije

$$\frac{k_{int}T^2}{\beta + |s_{\delta,k}|} > 0, \tag{31}$$

$$2(2 - k_{s1}) + \frac{k_{int}T^2}{\beta + |s_{\delta,k}|} > 0, \tag{32}$$

$$\left|1 - k_{s1} + \frac{k_{int}T^2}{\beta + |s_{\delta,k}|}\right| < 1. \tag{33}$$

Kako važi da je $k_{int} > 0$, $k_{s1} \leq 1$, $\beta \geq 0$ i $T > 0$, prve dve nejednakosti su uvek ispunjene. Dakle, uslov stabilnosti definiše (33). Pošto je izraz unutar apsolutne vrednosti u (33) uvek pozitivan, apsolutna vrednost se može zanemariti i uslov postaje $k_{int}T^2/(\beta + |s_{\delta,k}|) < k_{s1}$, iz koga se nalazi

$$|s_{\delta,k}| > \frac{k_{int}T^2}{k_{s1}} - \beta. \tag{34}$$

Dakle, sistem (29) je stabilan unutar oblasti definisane relacijom (34), što znači da će u toj oblasti trajektorije sistema biti usmerene ka kliznoj površi $s_\delta = 0$. Važno je istaći da u slučaju konstantnih ili sporopromenljivih poremećaja, za koje se može smatrati da važi $d_k = d_{k-1}$, sistem (29) je autonoman jer je $\Delta_k = 0$. Tada će trajektorije sistema dosegnuti granicu konvergencije $|s_{\delta,k}| = k_{int}T^2/k_{s1} - \beta$. Očigledno je da u neposrednoj okolini klizne površi, datoj sa $|s_{\delta,k}| < k_{int}T^2/k_{s1} - \beta$, uslovi konvergencije nisu zadovoljeni, pa trajektorije napuštaju ovu oblast i tako nastaje kvazi-klizno kretanje.

Iz (34) se vidi da se primenom aproksimacije okarakterisane sa β, pored redukcije četeringa, može povećati oblast konvergencije sistema, tj. smanjiti zona oko klizne površi gde se konvergencija ne garantuje. Interesantno je da se za vrednost $\beta = k_{int}T^2/k_{s1}$ dobija uslov konvergencije

$$|s_{\delta,k}| > 0, \tag{35}$$

koji ukazuje da su u celom prostoru oko klizne površi ispunjeni uslovi konvergencije. Tada se javlja diskretni KR. U slučaju $\beta = 0$, oblast konvergencije (34) se svodi na (18), što ukazuje na valjanost analize.

Ovde treba istaći da izvedeni zaključci važe u slučaju konstantnih i sporopromenljivih poremećaja. Za ostale tipove poremećaja treba očekivati da će njihova amplituda i frekvencija uticati na širinu kvazi-klizne oblasti, koja će svakako biti veća nego teorijski dobijena širina na osnovu oblasti konvergencije (34).

IV. Numerički primer i simulacioni rezultati

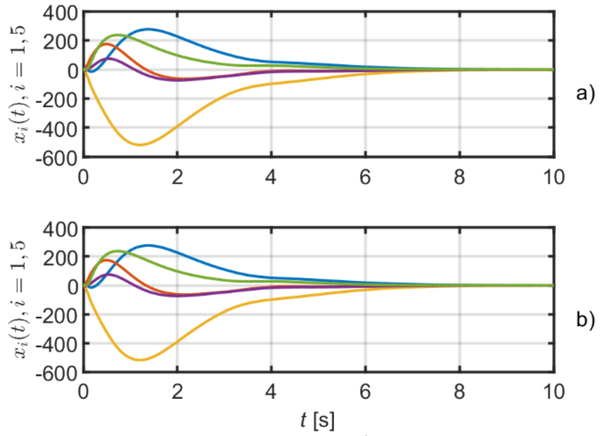
Dobijeni teorijski rezultati su provereni digitalnom simulacijom. Za tu svrhu je izabran akademski primer linearnog, nestabilnog i kontrolabilnog objetka upravljanja petog reda, čiji model (1) je definisan matricama

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & -4 & 6 & -10 & 12 \\ -8 & -6 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & -14 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

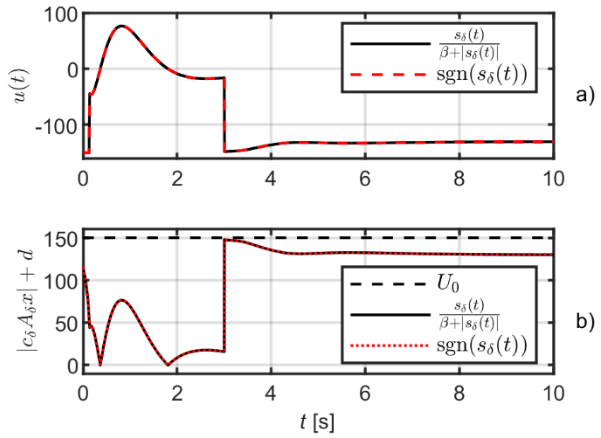
Neka je proizvoljno izabrano početno stanje sistema $x(0) = [10 \quad -5 \quad 0 \quad -10 \quad 5]^{\mathrm{T}}$. Perioda diskretizacije sistema je $T = 0.001$ s.

Zadatak upravljanja je da se sistema iz proizvoljnog početnog stanja dovede u ranotežno stanje (koordinatni početak), organizovanjem KR duž površi sa definisanom dinamikom. Neka je željena dinamika sistema u KR data spektrom sopstvenih vrednosti $\lambda = [-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad 0]$ u kontinualnom domenu. Korišćenjem $\lambda_{\delta i} = (e^{\lambda_i T} - 1)/T$, $i = 1, \cdots, n-1$, dobija se spektar u δ-domenu

$$\lambda_\delta = [-0.9995 \quad -1.998 \quad -2.9955 \quad -3.992 \quad 0].$$



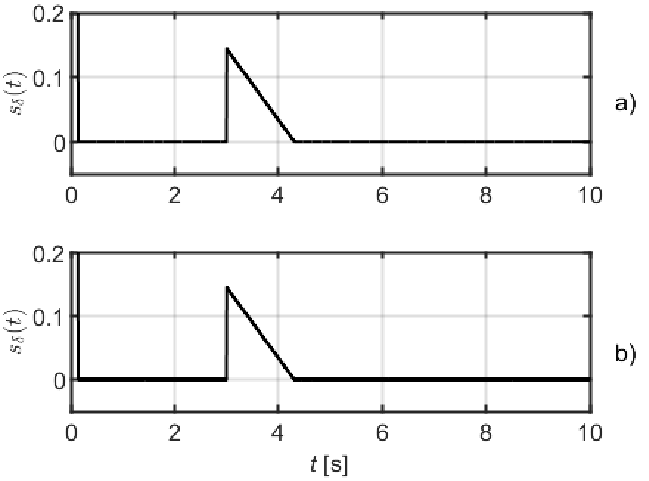
Sl. 2. Koordinate stanja: a) $\beta = 1.1111 \cdot 10^{-4}$; b) $\beta = 0$



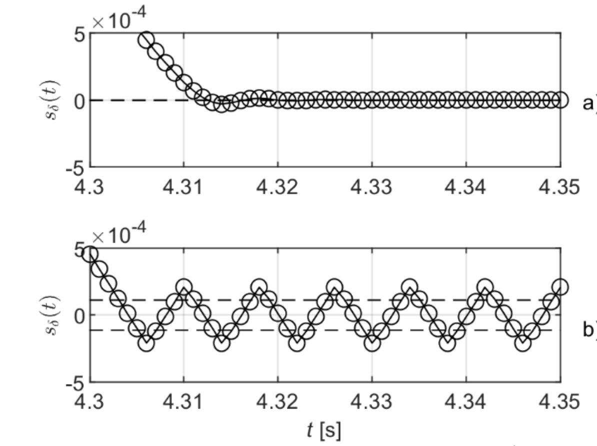
Sl. 3. a) Upravljanja; b) Ispunjenje uslova (17)

Odgovarajuća klizna površ koja obezbeđuje željenu dinamiku je definisana vektorom

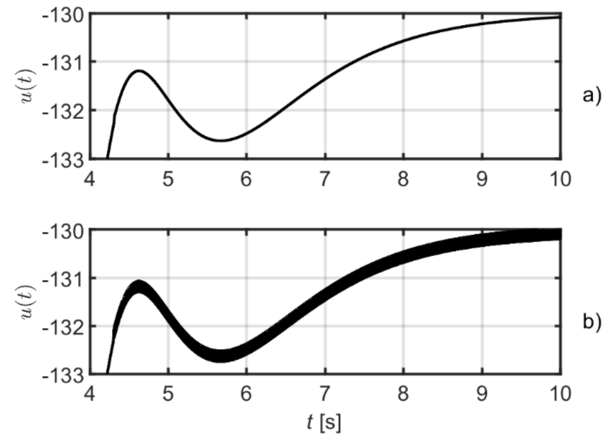
$c_\delta = [0.4437 \quad 0.5794 \quad 0.3072 \quad -0.6614 \quad 0.063]$, dobijenog iz (9). Parametri regulatora su $k_{s1} = 0.9$, $k_{s2} = 0.1$ i $k_{int} = 100$, dok je ograničenje u sistemu $U_0 = 150$.



Sl. 4 Klizna promenljiva: a) $\beta = 1.1111 \cdot 10^{-4}$; b) $\beta = 0$



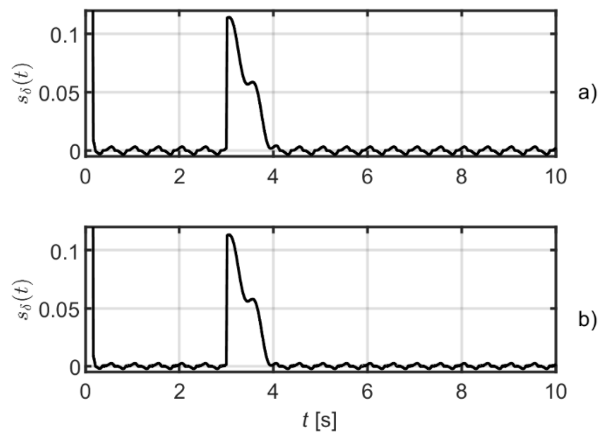
Sl. 5 Klizna promenljiva (uvećan detalj): a) $\beta = 1.1111 \cdot 10^{-4}$; b) $\beta = 0$



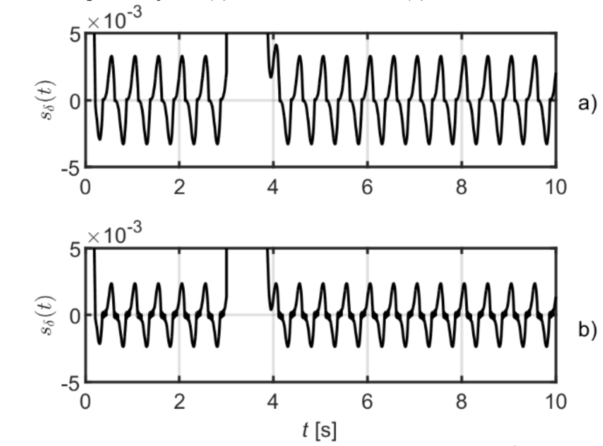
Sl. 6. Upravljanje (uvećan detalj): $\beta = 1.1111 \cdot 10^{-4}$; b) $\beta = 0$

U prvom testu sistem je izložen odskočnom poremećaju $d(t) = 130h(t-3)$, gde je $h(t)$ Hevisajdova funkcija. Posmatrani su slučajevi primene aproksimacije (19) sa karakterističnim vrednošću $\beta = k_{int}T^2/k_{s1} = 1.1111 \cdot 10^{-4}$ i slučaj sa signum funkcijom ($\beta = 0$). Na Sl. 2 i Sl. 3 su prikazane koordinate stanja, upravljanja i ispunjenje uslova izlaska sistema iz zasićenja (17), na kojima oba sistema imaju naizgled iste odzive. Koordinate stanja asimptotski teže koordinatnom početku uprkos dejstvu poremećaja. Izlazi regulatora su inicijalno u zasićenju ali veoma brzo izlaze iz zasićenja, budući da je uslov (17) sve vreme ispunjen. Klizne promenljive, prikazane na Sl. 4, ukazuju da se brzo uspostavlja KR i da dejstvo poremećaja izbacuje sistem iz KR ali da regulatori uspevaju da ponovo uspostave KR.

Međutim, uvećani detalji kliznih promenljivih na Sl. 5, gde su kružićima označene vrednosti klizne promenljive u trenucima odabiranja, ukazuju na različitu prirodu kretanja sistema u neposrednoj okolini klizne površi. Naime, za slučaj $\beta = k_{int}T^2/k_{s1}$ oblast konvergencije (35) obuhvata čitavu okolinu klizne površi, te trajektorija sistema treba da dođe na kliznu površ za dati tip poremećaja. Ovo predviđeno ponašanje sistema je potvrđeno odzivom na Sl. 5a, gde se u sistemu uspostavlja diskretni KR, pa je ostvarena maksimalna tačnost. U slučaju primene signum funkcije u regulatoru ($\beta = 0$), na osnovu (18) se vidi da u naznačenoj okolini klizne površi, oivičenoj isprekidanim linijama na Sl. 5b, ne postoji konvergencija te trajektorije sistema napuštaju ovu oblast. U ovom slučaju uspostavlja se diskretni kvazi-klizni režime, što ukazuje na smanjenu tačnost sistema i pojavu četeringa.



Sl. 7. Klizna promenljiva: a) $\beta = 1.1111 \cdot 10^{-4}$; b) $\beta = 0$



Sl. 8. Klizna promenljiva (uvećan detalj): a) $\beta = 1.1111 \cdot 10^{-4}$; b) $\beta = 0$

Efekti uvođenja kontinualne aproksimacije na redukciju četeringa se vide na Sl. 6, gde su prikazani uvećani detalji upravljačkih signala oba sistema. Očigledno je da je upravljanje u slučaju primene aproksimacije za graničnu vrednost β u potpunosti glatko, dok za $\beta = 0$ upravljanje sadrži visokofrekvencijsku komponentu po uspostavljanju kvazi-kliznog režima. Ova komponenta, iako je po amplitudi veoma mala, ipak ukazuje na mogućnost pojave četeringa.

U drugom testu se ispituju performanse sistema u prisustvu promenljivih poremećaja. Na sisteme deluje složeni poremećaj koji se sastoji iz konstantnog i sinusoidalnog dela, tj. $d(t) = 10\sin(4\pi t) + 100h(t-3)$. Ostala podešenja u sistemima su identična prethodnom slučaju.

Odzivi kliznih promenljivih su dati na Sl. 7 iz kojih se vidi da sistemi ispoljavaju manju robusnost na promenljive poremećaje u odnosu na sporopromenljive poremećaje. Na osnovu uvećanih delova ovih grafika, prikazanih na Sl. 8, vidi se da u oba slučaja nastaje kvazi-klizni režim. Takođe se vidi da je širina kvaziklizne oblasti u slučaju primene aproksimacije nešto veća u odnosu na slučaj za $\beta = 0$, iako za graničnu vrednost β su uslovi konvergencije ostvareni u celom prostoru. To ukazuje da za ovakav tip poremećaja sistem sa kontinualnom aproksimacijom zbog glatke kompenzacione komponente upravljana gubi izvesni stepen robusnosti, a samim tim i tačnosti.

V. Zaključak

Sprovedenom analizom i simulacionim rezultatima je pokazano da primena predložene kontinualne aproksimacije signum funkcije u digitalnom regulatoru promenljive strukture, pored efekta ublažavanja četeringa, otvara mogućnost proširivanja oblasti konvergencije sistema ka kliznoj površi. U slučaju sporopromenljivih poremećaja data aproksimacija ima blagotvorno dejstvo, jer se redukuje četering i ostvaruje diskretni KR, čime se postiže apsolutna tačnost. U slučaju promenljivih poremećaja, primena aproksimacije koja redukuje četering ipak dovodi do izvesnog smanjenja robusnosti, odnosno tačnosti. U tom slučaju je potrebno je naći kompromis između prihvatljivog nivoa četeringa i zahtevane tačnosti.

Literatura

[1] S. V. Emelyanov, A Method to Obtain Complex Regulation Laws Using Only the Error Signal or Regulated Coordinate and Its First Derivatives, Avtomat. Telemekh. 18 (10), pp. 873-885, 1957

[2] V.I. Utkin, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, 1992.

[3] B. Draženović, (1969) The invariance conditions in variable structure systems. Automatica 5, pp. 287–295

[4] Slotine J.J.E. (1984) Sliding controller design for non-linear systems. Int. Jour. Control 40, pp. 421–434.

[5] Bondarev, A.G., Bondarev, S.A., Kostylyeva, N.Y., Utkin, V.I., “Sliding modes in systems with asymptotic observers”, Aut. Remote Contr., 46 (1985) no 6, pp. 679-684

[6] Levant A (1993) Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. Int. Jour. Control, 58, pp. 1247–1263.

[7] Utkin V., "Discussion aspects of higher order sliding mode control", *IEEE Trans.* AC, vol. 61, no. 3, pp. 829-833, 2016.

[8] Perez-Ventura U., Fridman L., “When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? Frequency domain criteria,” *Inter. Jour. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 29, pp. 810-828, 2019.

[9] Utkin V., Poznyak A, Orlov Y., Polyakov A., “Conventional and high order sliding mode control,” *Jour. of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 15, pp. 10244-10261, 2020.

[10] Castillo I., Freidovich L.B., “Describing-function-based analysis to tune parameters of chattering reduction approximations of sliding mode controllers,” *Control Engineering Practice*, vol. 95, 104230, 2020.

[11] Milosavljević, Č. (1985): "General Conditions for the Existence of Quasi-sliding Mode on the Switching Hyper-plane in Discrete Variable Structure Systems", *Automatic and Remote Control*, 46, pp. 307-314

[12] Drakunov, S. V., Utkin, V.I. (1989), ‘On discrete-time sliding mode’, Proc. IFAC Symposium on *Nonlinear Control Systems design*, Capry (Italy), pp. 484-489

[13] Gao, W., Wang, Y. Homaifa A. (1995), “Discrete-time variable structure control systems,*” IEEE Trans. Ind. Electron.*, IE-42, pp. 117-122.

[14] Bartolini G, Ferrara A, Utkin VI (1995) Adaptive sliding mode control in discrete-time systems. Automatica, 31, pp. 769–773.

[15] A. Bartoszewitz, “Discrete-time quasi-sliding mode control strategies,” IEEE Trans. Ind. Elect., vol. 45, pp. 633-637, 1998.

[16] Golo G, Milosavljević Č (2000) Robust discrete-time chattering free sliding mode control. Syst. Control Lett. 41, pp. 19–28.

[17] Su W.C., Drakunov S V., Özgüner Ü (2000) An O(T2) boundary layer in sliding mode for sampled-data systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 45, pp.4 82–485.

[18] Milosavljević Č, Peruničić-Draženović B, Veselić B, Mitić D (2007) A new design of servomechanisms with digital sliding mode. Electr. Eng. 89, pp. 233–244.

[19] Lješnjanin M, Peruničić B, Milosavljević Č, Veselić B, (2011), Disturbance compensation in digital sliding mode. Int. conf. EUROCON. Lisboa, Portugal (paper 171)

[20] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, A. Huseinbegović, M. Petronijević, “Discrete-time sliding mode control of linear systems with input saturation,” *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 30, no. 5, pp. 517-528, 2020.

[21] Koch S, Reichhartinger M, Horn M, Discrete-time equivalents of the super-twisting algorithm, Automatica 107 (2019) 190–199

[22] Draženović B, Milosavljević Č, Veselić B (2013) Comprehensive Approach to Sliding Mode Design and Analysis in Linear Systems. In: Bandyopadhyay B, Janardhanan S, Spurgeon SK (eds) Advances in Sliding Mode Control: Concept, Theory and Implementation. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp 1–19

[23] Ghane H, Menhaj M.B, Eigenstructure-based analysis for non-linear autonomous systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* (2015) 32, 21–40.

Abstract

The paper explores possibility of chattering reduction of a digital sliding mode controller for linear systems with saturated inputs. A nonlinear discontinuous relay function in the control law is substituted by an adequate continuous approximation. Stability of the modified control system is analyzed and the observed system properties are emphasized. The obtained theoretical results have been confirmed by simulation of a numerical example.

Chattering Alleviation of a Digital Sliding Mode Controller for Linear Systems

B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, S. Huseinbegović, M. Petronijević