Projektovanje klizne površi za klizne režime višeg reda u linearnim sistemima sa više ulaza

Boban Veselić, *Member, IEEE,* Čedomir Milosavljević, Branislava Draženović, *Senior Member, IEEE,* Senad Huseinbegović, *Member, IEEE*

***Apstrakt*—Rad ispituje mogućnost projektovanja klizne površi za realizaciju kliznih režima višeg reda (KRVR) u linearnim sistemima upravljanja sa više ulaza. U posmatranom slučaju klizna površ mora ispuniti dva zahteva: da obezbedi željenu dinamiku sistema u KRVR i da ostvari odgovarajući relativni red klizne promenjive u zavisnosti od željenog reda KR. Pokazano je da takva klizna površ postoji samo u sistemima sa specifičnom strukturom, i ne dozvoljava proizvoljni izbor dinamike sistema. Teorijsko dobijeni rezultati su verifikovani na numeričkom primeru i ilustrovani simulacionim rezultatima.**

***Ključne reči*—Klizni režimi višeg reda, projektovanje klizne površi, dinamika sistema u kliznom režimu, podešavanje polova.**

I. Uvod

Jedna od značajnih robusnih tehnika upravljanja su sistemi upravljanja promenljive strukture (SUPS) sa kliznim režimom (KR) [1], zbog teorijske invarijantnosti na poremećaje koji deluju u vektorskom prostoru upravljanja [2], tj. ispunjavaju uslove poklapanja. Ova osobina idealnih KR se u realnosti svodi na veliku robusnost sistema. Međutim, usled konačne prekidačke frekvencije i postojanja nemodelovane dinamike indukuju se visoko frekvencijske oscilacije u sistemu (chattering), koje predstavljaju glavnu prepreku široke primene ove tehnike upravljanja. KR višeg reda (KRVR) se javljaju u nastojanju da se redukuje pojava četeringa [3]. Najpre se primenjuju u sistemima sa jednim ulazom [4-6], a kasnije i u multivarijabilnim sistemima [7].

Određivanjem klizne površi u prostoru stanja po kojoj se odvija KR, definiše se dinamika sistema u KR. Postoje nekoliko metoda projektovanja klizne površi za konvencionalne KR (prvoga reda) u slučaju linearnih sistema. Najčešće se one baziraju na transformaciji modela sistema u prostoru stanja u tzv. regularnu formu [1], gde je redukovana dinamika sistema u KR jasno uočljiva. U sistemima sa jednim ulazom, primenom Akermanove formule [8] je moguće projektovati kliznu površ bez transformacije sistema. Takođe, predložen je i metod projektovanja klizne površi bez transformacije za sisteme sa jednim i više ulaza [9,10]. Projektovanje klizne površi se može vršiti i sa ciljem minimizacije uticaja poremećaja koji ne zadovoljavaju uslove poklapanja [2], što je predloženo u radovima [11,12].

Organizacija KRVR zahteva da relativni red vektora klizne promenljive, koji je vezan za kliznu površ, bude jednak željenom redu KR. Dakle, klizna površ u slulčaju KRVR mora da ispuni dvojaki zahtev: (i) da obezbedi željenu redukovanu dinamiku sistema u KRVR i (ii) da ostvari potreban relativni red kliznih promenljivih u odnosu na upravljanje. Mali broj radova je tretirao problematiku projektovanja klizne površi u slučaju KRVR i to samo za sisteme sa jednim ulazom. Generalizacija Akermanove formule [8] za projektovanje klizne površi proizvoljnog relativnog reda, koja obezbeđuje željenu dinamiku u sistemu sa jednim ulazom je data u [13,14]. U [15] je takođe data procedura projektovanja klizne površi za KRVR u sistemima sa jednim ulazom, koja se bazira na analogiji sa projektivanjem konvencionalne povratne sprege po stanju.

U ovom radu se ispituje mogućnost projektovanja klizne površi kod linearnih sistema n-tog reda sa m ulaza sa ciljem organizovanja KR proizvoljnog reda r, uz ostvarenje željene dinamike sistema u KRVR. Takva klizna površ treba da bude relativnog reda r u odnosu na vektor upravljanja i da obezbedi željenu redukovanu dinamika $(n-rm)$-tog reda u KRVR. Pokazano je da takvu kliznu površ je moguće naći samo u sistemima koji ispunjavaju specifične strukturne zahteve, tj. u sistemima gde su indeksi kontrolabilnosti međusobno jednaki i jednaki redu KR r. Takođe, predložena je i jednostavna procedura za nalaženje te klizne površi. Validnost ove metode za projektovanje klizne površi je matematički dokazana i verifikovana simulacionim rezultatima numeričkog primera.

II. Opis problema

Posmatra se linearni vremenski invarijantni sistem upravljanja, opisan modelom u prostoru stanja

$$\dot{x} = Ax + B(u + d), \tag{1}$$

gde $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor stanja i $u, d \in \mathbb{R}^m$ su vektori upravljanja i nepoznatog ograničenog poremećaja, respektivno. Treba primetiti da su zadovoljeni uslovi poklapanja [2], te je sistem u idealnom KR invarijantan na poremećaj d. Matrice A i B su konstantne i imaju odgovarajuće dimenzije. Takođe, matrica B je punog ranga $(\mathrm{rank}(B) = m)$ i sistem je potpuno kontrolabilan, pa je matrica kontrolabilnosti $Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ punog ranga $(\mathrm{rank}Q_c = n)$. Sve

Boban Veselić – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, Srbija (e-mail: boban.veselic@elfak.ni.ac.rs).

Čedomir Milosavljević – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Istočno Sarajevo, Bosna i Hercegovina (e-mail: cedomir.milosavljevic@elfak.ni.ac.rs).

Branislava Draženović i Senad Huseinbegović – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, Bosna i Hercegovina (e-mails: brana_p@hotmail.com, shuseinbegovic@etf.unsa.ba).

Ovaj rad je podržan od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

promenljive u (1) su funkcije vremena, ali zbog jednostavnije notacije argumenti promenljivih su izostavljeni u (1) i nadalje.

Zadatak upravljanja je organizovati KR r-tog reda u sistemu (1) duž klizne površi koja obezbeđuje željenu dinamiku sistema u KR. Neka je vektor klizne promenljive $g \in \mathbb{R}^m$ definisan sa

$$g = Cx,\, C \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{2}$$

Kretanje sitema (1), (2) u potprostoru datog jednačinama

$$g = \dot{g} = \ddot{g} = \cdots = g^{(r-1)} = 0 \tag{3}$$

se naziva KR r-tog reda, [3]. Da bi upravljanje ostvarilo uslov (3) za konačno vreme u sistemu (1), (2), ono mora biti diskontinualno, makar na skupu (3), [5], uz preduslov da je relativni red klizne promenljive jednak r u odnosu na upravljanje. To znači da se upravljanje po prvi put eksplicitno pojavljuje u r-tom izvodu po vremenu klizne promenljive g, tj. u $g^{(r)}$. r-ti izvod klizne promenljive se dobija kao

$$g^{(r)} = CA^r x + \textstyle\sum_{j=0}^{r-1} CA^{r-1-j}B(u^{(j)} + d^{(j)}). \tag{4}$$

Na osnovu (4), klizna promenljiva će imati traženi relativni red ukoliko važi sledeći uslov

$$C \cdot [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r-2}B] = 0_{m\times m(r-1)}, \tag{5}$$

$$CA^{r-1}B \neq 0_m. \tag{6}$$

Tada će r-ti izvod klizne promenljive (4) biti

$$g^{(r)} = CA^r x + CA^{r-1}B(u + d). \tag{7}$$

Dinamika sistema u KR r-tog reda je redukovanog reda, koji je jednak $(n - mr)$. Ekvivalentno upravljanje u_{eq} se određuje iz (7) na osnovu uslova

$$g^{(r)}\big|_{u=u_{eq}} = 0, \tag{8}$$

te se dobija

$$u_{eq} = -(CA^{r-1}B)^{-1}CA^r x - d. \tag{9}$$

Smenom ekvivalentnog upravljanja u (1) dobija se opis sistema u KR r-tog reda

$$\dot{x} = Ax + B(u + d)\big|_{u=u_{eq}} = [I - B(CA^{r-1}B)^{-1}CA^{r-1}]Ax = PAx = A_{eq}x. \tag{10}$$

Dinamika sistema u idealnom KR r-tog reda (10) pokazuje da je sistem neosetljiv na poremećaj d, koji zadovoljava uslove poklapanja. Kako je poremećaj nepoznat, ekvivalentno upravljanje (9) se u praksi ne može ostvariti jer zahteva poznavanje d.

Lako se pokazuje da za matricu $P = I - B(CA^{r-1}B)^{-1}CA^{r-1}$ važi $P^2 = P$, tj. P je idempotentna matrica. Tada je matrica P projektor. Na osnovu osobina projektorskih matrica [16], može se utvrditi da je $\mathrm{rank}(P) = n - m$. Tada je $\mathrm{rank}(A_{eq}) = \mathrm{rank}(PA) = n - m$, što daje $\det(A_{eq}) = 0$. Dakle, A_{eq} je singularna matrica čije nenulte sopstvene vrednosti definišu dinamiku sistema koja je $(n - mr)$-tog reda nakon nastanka KR r-tog reda. Matrica A_{eq} treba imati $(n - mr)$ stabilnih sopstvenih vrednosti, dok preostalih mr sopstvenih vrednosti treba biti jednake nuli. Iz (10) se vidi da se sopstvene vrednosti matrice A_{eq} mogu podešavati jedino izborom matrice C koja definiše kliznu površ (2). Dakle, matrica C ima dvojaku ulogu u sistemima upravljanja sa KRVR. Da ostvari željenu dinamiku u KR r-tog reda (10) i da obezbedi da relativni red klizne promenljive (2) bude r.

Kako je sistem (1) kontrolabilan, matrica kontrolabilnosti Q_c ima puni rang što znači da ova matrica ima n linearno nezavisnih kolona. Te kolone se mogu izvući iz Q_c da obrazuju kvadratnu matricu $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ koja je zapravo redukovana matrica kontrolabilnasti. Neka su b_i, $i = \overline{1,m}$ kolone matrice B. Tada se matrica H može predstaviti u obliku

$$H = [b_1 \cdots b_m \quad Ab_1 \cdots A^{r_1-1}b_1 \quad \cdots \quad Ab_m \cdots A^{r_m-1}b_m]. \tag{11}$$

Indeksi r_i, $i = \overline{1,m}$ iz matrice (11) su indeksi kontrolabilnosti [17], i važi $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

Korišćenjem indeksa kontrolabilnosti moguće je dekomponovati sistem (1) u skup od m podsistema uvođenjem vektora koji se sastoji od m pomoćnih izlaza y_i $(i = \overline{1,m})$ i koji se definiše kao

$$y = Fx, F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, F \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{12}$$

Da bi se sprovela dekompozicija, svaki pomoćni izlaz y_i treba imati relativni red koji je jednak indeksu kontrolabilnosti r_i, [18]. Zato treba naći odgovarajuću matricu F koja ostvaruje taj zahtev. Jedno rešenje matrice F je dato u [19] kao

$$f_i = [0_{1\times m\cdot(r_i-1)} \quad 0_{1\times(i-1)} \quad 1]H_i^{\dagger} \; (i = \overline{1,m}), \tag{13}$$

$$H_i = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r_i-2}B \quad A^{r_i-1}B_i], \tag{14}$$

gde operator $\dagger$ označava pseudoinverziju i $B_i = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_i]$ je deo matrice B.

Izvodi po vremenu pomoćnih izlaza koji imaju tražene relativne redove su

$$y_i^{(j)} = f_i A^j x \;\; (j = \overline{0, r_i - 1}), \tag{15}$$

$$y_i^{(r_i)} = f_i A^{r_i} x + f_i A^{r_i-1}B(u + d). \tag{16}$$

Sistem (1) je dekomponovan u m podsistema, kao što je pokazano u [20], ako i samo ako kvadratna matrica $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 A^{r_1-1}B \\ f_2 A^{r_2-1}B \\ \vdots \\ f_m A^{r_m-1}B \end{bmatrix} \tag{17}$$

je punog ranga. Ovo je trougaono rasprezanje [21] pošto važi

$$w_i = f_i A^{r_i-1}B = [0_{1\times(i-1)} \quad 1 \quad \omega_{1\times(m-i)}], \tag{18}$$

gde je $\omega_{1\times(m-i)} = [\omega_{i,i+1} \quad \omega_{i,i+2} \quad \cdots \quad \omega_{i,m}]$ $(\forall \omega_{i,j} \in \mathbb{R};\, i = \overline{1,m};\, i < j \leq m)$. Matrica W je gornje-trougaona matrica, pa je $\det(W) = 1$.

Očigledno je da se ekvivalentno upravljanje (9) može sagledati kao tradicionalna povratna sprega po stanju, te se model (10), koji opisuje dinamiku sistema u KRVR, može napisati kao

$$\dot{x} = A_{eq}x = (A - B(CA^{r-1}B)^{-1}CA^r)x = (A - BK)x, \tag{19}$$

gde je $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica pojačanja povratne sprege po stanju $u = -Kx$. Vidi se da postoji izvesna korelacija između matrice klizne površi C i matrice pojačanja K. Dakle, nalaženje matrice C, koja obezbeđuje željenu dinamiku u KRVR (iskazanu sopstvenim vrednostima matrice A_{eq}), je ekvivalentno određivanju matrice K povratne sprege po stanju koja obezbeđuje željenu lokaciju polova spregnutog sistema.

Mogućnost redukcije reda dinamike u KRVR je veća u odnosu na kovencionalni KR. Kod KR r-tog reda, matrica A_{eq} će imati mr nultih sopstvenih vrednosti. To znači da će se pojaviti slučaj da je red višestrukosti polova spregnutog sistema veći od broja ulaza u sistem, što predstavlja problem u korišćenju nekih standardnih metoda projektovanja povratne sprege po stanju multivarijabilnih sistema.

Efikasna metoda projektovanja povratne sprege po stanju koja rešava nevedeni problem višestrukosti polova je predložena u [19], i zasniva se na dekompoziciju sistema (15), (16). Dinamika svakog od podsistema je reda r_i. Neka je željena dinamika sistema opisana sledećim skupom diferencijalnih jednačina

$$\delta^{r_i} y_i + \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{i,j}\, \delta^{r_i - j} y_i = P_i(\delta) y_i = 0, i = \overline{1,m}, \quad (20)$$

gde δ označava operator diferenciranja d/dt, a $\alpha_{i,j}$ su realni koeficijenti. U [19] je pokazano da matrica pojačanja K koja obezbeđuje željenu dinamiku spregnutog sistema se može izračunati kao

$$K = W^{-1} M, \quad (21)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_m \end{bmatrix}, m_i = f_i P_i(A), i = \overline{1,m}. \quad (22)$$

III. PROJEKTOVANJE KLIZNE POVRŠI ZA KRVR

Klizna površ je potprostor u prostoru stanja duž koje se organizuje KR pri kretanju stanja sistema do koordinatnog početka. Klizna površ se najčešće bira u linearnom obliku (2), koja definiše hiprravan

$$Cx = 0 \quad (23)$$

u prostoru stanja. Projektovanje klizne površi podrazumeva određivanje matrice C koja dozvoljava nastanak KRVR i ostvaruje željenu dinamiku sistema.

Uslov ostvarenja željene dinamike se može izvesti iz (19), gde se uočava jednakost $(CA^{r-1}B)^{-1} CA^r = K$, pri čemu se pretpostavlja da je lako naći matricu K koja obezbeđuje željenu dinamiku sistema sa povratnom spregom po stanju. Dobijeni uslov se može napisati u obliku

$$CA^{r-1}(A - BK) = 0_{m\times n}. \quad (24)$$

Takođe, matrica C treba ispuniti neophodne uslove relativnog reda, date sa (5) i (6). Uslov (6) se bez gubitka opštosti može usvojiti kao $CA^{r-1}B = I_m$. Sve ove jednačine koje mora da zadovolji matrica C se mogu združiti u matričnu formu

$$CL = D, \quad (25)$$

$$L = [A^{r-1}(A - BK) \quad B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r-2}B \quad A^{r-1}B], \quad (26)$$

$$D = [0_{m\times n} \quad 0_{m\times m(r-1)} \quad I_m]. \quad (27)$$

Dakle, matricu C treba naći kao rešenje jednačine (25), koja se sastaji od m sistema jednačina, pri čemu svaki sistem čine $n + rm$ jednačina sa n nepoznatih, koje su elementi vrsta matrice C. Svaki sistem će imati rešenje ukoliko je broj linearno nezavisnih jednačina manji ili jednak broju nepoznatih, što je u u ovom slučaju n. Razmatrajući (25), bar jedno rešenje za C postoji ukoliko je rang proširene matrice jednak rangu matrice L, to jest

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} L \\ D \end{bmatrix}\right) = \text{rank}(L), L \in \mathbb{R}^{n\times(n+rm)}, D \in \mathbb{R}^{m\times(n+rm)}. \quad (28)$$

Ukoliko je u (28) ovaj rang jednak n, rešenje je jedinstveno.

U cilju sagledavanja mogućnosti postojanja rešenja jednačina (25) potrebno je inicijalno proceniti broj linearno nezavisnih jednačina. Zato će se nezavisno analizirati jednačine koje matrica C mora da zadovolji. Kada je $\text{rank}(A) = n$, onda je $\text{rank}(A^{r-1}(A - BK)) = \text{rank}(A^{r-1}A_{eq}) = n - m$, pošto je $\text{rank}(A_{eq}) = n - m$. Ovo ukazuje da (24) ima $n - m$ linearno nezavisnih jednačina. Jednačina (6) doprinosi još dodatnih m linearno nezavisnih jednačina. Na osnovu ovoga je lako zaključiti da linearno nezavisne jednačine iz (5) u odnosu na celokupni sistem čine da broj ukupnih linearno nezavisnih jednačina prevazilazi n. To znači da u opštem slučaju treba očekivati da će pridodavanje matrice D matrici L u (28) povećati rang proširene matrice. Odatle sledi da

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} L \\ D \end{bmatrix}\right) > \text{rank}(L) = n, \quad (29)$$

i sistem u opštem slučaju nema rešenje. Međutim, potrebno je ispitati da li postoji specifični slučaj kada sistem jednačina ima rešenje.

Posmatraće se slučaj kada su u sistemu (1) indeksi kontrolabilnosti međusobno jednaki i jednaki redu željenog KRVR, tj. kada važi

$$r = r_1 = r_2 = \cdots = r_m, \quad (30)$$

Kako je $\sum_{i=1}^m r_i = n$, iz (30) sledi $\sum_{i=1}^m r_i = mr = n$. Uslov (30) se onda može razložiti u dva zahteva

$$r_i = n/m, i = \overline{1,m}, \quad mr = n. \quad (31)$$

Red sistema n treba biti deljiv brojem ulaza m. Takođe, pošto ima mr nultih sopstvenih vrednosti matrice A_{eq} za KR r-tog reda, u ovom slučaju svih n sopstvenih vrednosti matrice A_{eq} moraju biti jednake nuli. Redukovana matrica kontrolabilnosti H u slučaju (30) postaje

$$H = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r-1}B]. \quad (32)$$

Polazeći od (24), prvi korak je odrediti matricu pojačanja K koja daje potrebne sopstvene vrednosti matrice A_{eq}, korišćenjem prethodno opisane procedure. U slučaju (30), trougaona matrica W (17) postaje

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} A^{r-1}B = FA^{r-1}B. \quad (33)$$

Potrebna dinamika spregnutog sistema u ovom slučaju je da su sve sopstvene vrednosti jednake nuli, što na osnovu (20) daje

$$P_i(A) = A^r, i = \overline{1,m}. \quad (34)$$

Tada se matrica M iz (22) može napisati kao

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} A^r = FA^r. \quad (35)$$

Vrste $f_i, i = \overline{1,m}$ matrice F se mogu naći na osnovu (13), (14). Svaki sistem jednačina vezan za (13), (14)

$$f_i[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r_i-2}B \quad A^{r_i-1}B_i] = [0_{1\times m\cdot(r_i-1)} \quad 0_{1\times(i-1)} \quad 1], (i = \overline{1,m}) \quad (36)$$

se sastoji od $n - m + i$ linearno nezavisnih jednačina koji je manji od broja nezavisnih n za $i = \overline{1, m-1}$. To znači da postoji beskonačno mnogo rešenja za F, a samim tim i za K. Bilo koje od dobijenih rešenja za K će obezbediti željenu dinamiku. Zato je moguće sistem jednaćina (36) dopuniti sa $m - i$ jednačina koje neće uticati na korektnost rešenja. Adekvatana dopuna jednačina (36) je

$$f_i[A^{r-1}b_{i+1} \quad \cdots \quad A^{r-1}b_m] = 0_{1\times(m-i)}, (i = \overline{1,m}). \quad (37)$$

Tada se sistem (36) proširuje u oblik

$$f_i[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r-1}B] =$$
$$[0_{1\times(n-m)} \quad 0_{1\times(i-1)} \quad 1 \quad 0_{1\times(\mathrm{m-i})}], (i = \overline{1,m}). \tag{38}$$
U proširenom sistemu (38) broj jednačina je jednak broju nepoznatih.

Objedinjavajući svih m sistema jednačina, dobija se sledeći matrični zapis
$$F[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{r-1}B] = FH = [0_{m\times(n-m)} \quad I_m]. \tag{39}$$
Posmatrajući jednačinu $FA^{r-1}B = I_m$ iz zapisa (39), zaključuje se da će (33) biti jedinična matrica, tj. $W = I_m$. Iz (21) sledi $K = M$ što na osnovu (35) daje
$$K = FA^r. \tag{40}$$
Poređenjem (39) sa sistemom jednačina (5) i $CA^{r-1}B = I_m$, može se primetiti da su ova dva sistema identična. Odatle se može zaključiti da je $F = C$ ukoliko nađeno K iz (40) zadovoljava (24). Zaista, ukoliko se $K = CA^r$ zameni u (24) dobija se $CA^{r-1}(A - BCA^r)$, što je nula matrica pod uslovom $CA^{r-1}B = I_m$. To znači da je C identično sa F i da je jednačina (24) sadržana u preostalim jednačinama sistema (25)-(27). Onda se (24) može zanemariti u sistemu (25)-(27), što daje
$$CH = [0_{m\times(n-m)} \quad I_m]. \tag{41}$$
Kako je redukovana matrica kontrolabilnosti H punog ranga n, njena inverzna matrica postoji i C se lako može naći kao
$$C = [0_{m\times(\mathrm{n-m})} \quad I_m]H^{-1}. \tag{42}$$
Ovaj rezultat pokazuje da matrica klizne površi C, koja istovremeno zadovoljava željenu dinamiku sistema u KRVR i neophodan relativni red, se može naći samo u veoma specifičnom slučaju. Ograničenja (30) ili (31) uslovljavaju da je matrica spregnutog sistema A_{eq} nilpotentna, te KRVR obezbeđuje dinamiku nultog reda [19], što rezultuje konačnim vremenom dolaska u ravnotežno stanje. U svim ostalim slučajevima linearnih sistema, matrica C koja obezbeđuje proizvoljen red KRVR i željenu dinamiku se ne može naći.

IV. Izbor algoritma upravljanja

Nakon konstrukcije klizne površi potrebno je naći upravljanje koje organizuje KR r-tog reda duž te površi. Primenjeni upravljački algoritam treba da obezbedi uslov (3) klizne promenljive g. Pošto nađeno C zadovoljava uslove relativnog reda (5), (6) i $CA^{r-1}B = I_m$, izvodi po vremenu klizne promenljive su dati sa
$$g^{(j)} = CA^j x, j = \overline{0, r-1}. \tag{43}$$
$$g^{(r)} = CA^r x + u + d = Kx + u + d. \tag{44}$$
Iz (44) je očigledno da svaka komponenta vektora $g^{(r)}$ zavisi isključivo od odgovarajuće komponente vektora upravljanja u. U ovako raspregnutom sistemu svaka komponenta klizne promenljive se može posmatrati odvojeno, to jest
$$g_i^{(r)} = c_i A^r x + u_i + d_i = k_i x + u_i + d_i, i = \overline{1,m}, \tag{45}$$
gde su c_i i k_i vrsta vektori matrica C i K, respektivno. Dakle, sa stanovišta projektovanja regulatora, sistem (1) se može tretirati kao m sistema sa jednom izlazom. Tkođe, na osnovu jednakosti $F = C$ u slučaju (30) može se zaključiti da je pomoćni izlaz y ekvivalentan kliznoj promenljivi g.

Ostvareno rasprezanje (45) omogućava da se u realizaciji regulatora primene algoritmi upravljanja KRVR razvijeni za sisteme sa jednim ulazom. Na primer, u [5] je predloženo diskontinualno upravljanje koje u sistemu sa jednim ulazom ostvaruje uslov (3) za konačno vreme. Za isprojektovanu stabilnu dinamiku u KRVR, trajektorija sistema će asimptotski konvergirati duž (3) u koordinatni početak ($x \to 0$ for $t \to \infty$) uprkos dejstvu poremećaja koji zadovoljava uslove poklapanja.

Jedna mogućnost je primeniti upravljanje [6] u obliku
$$u_i = -c_i A^r x - \gamma_i(\xi_i), \; \xi_i = \left(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(r-1)}\right). \tag{46}$$
Tada (45) postaje
$$g_i^{(r)} = -\gamma_i(\xi_\mathrm{i}) + d_i. \tag{47}$$
Levant je u radu [5] dao skup kvazi-kontinualnih funkcija $\gamma_i(\xi_\mathrm{i})$ koje uspostavljaju KR r-tog reda u nelinearnim sistemima sa skalarnim upravljanjem. Kompleksnost ovih funkcija raste sa porastom reda KR, dok se četering smanjuje. Ove funkcije se lako mogu primeniti i na linearni slučaj (47).

Funkcije $\gamma_i(\xi_i)$ koje garantuju nastanak KRVR za konačno vreme se mogu izabrati kao nelinearne funkcije date u [4,5]. Na primer, $\gamma_i(\xi_i)$ za $r = 1,2,3$ su date respektivno kao
$$\gamma_i(\xi_i) = \alpha_i \frac{g_i}{|g_i|}, \tag{48}$$
$$\gamma_i(\xi_i) = \alpha_i \frac{\dot{g}_i + \beta_{1,i}|g_i|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sign}(g_i)}{|\dot{g}_i| + \beta_{1,i}|g_i|^{\frac{1}{2}}}, \tag{49}$$
$$\gamma_i(\xi_i) = \alpha_i \frac{\ddot{g}_i + \beta_{2,\mathrm{i}}\left(|\dot{g}_i| + \beta_{1,i}|g_i|^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\dot{g}_i + \beta_{1,i}|g_i|^{\frac{2}{3}}\mathrm{sign}(g_i)\right)}{|\ddot{g}_i| + \beta_{2,\mathrm{i}}\left(|\dot{g}_i| + \beta_{1,i}|g_i|^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{50}$$
gde su parametri $\alpha_i, \beta_{1,i}, \beta_{2,i} > 0$ i izabrani dovoljno veliki.

Treba uočiti da izračunavanje upravljanja zahteva poznavanje sukcesivnih izvoda po vremenu klizne promenljive $g_i^{(j)}$, $j = \overline{0, r-1}$. Međutim, u sistemima na koje deluju poremećaji koji zadovoljavaju uslove poklapanja, ovi izvodi se mogu naći iz (43) kao
$$g_i^{(j)} = c_i A^j x, j = \overline{0, r-1}. \tag{51}$$
Uključujući sve komponente upravljanja (46), konačni vektor upravljanja se može formirati kao
$$u = -CA^r x - \gamma(\xi), \gamma(\xi) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\xi_1) \\ \vdots \\ \gamma_m(\xi_m) \end{bmatrix}, \tag{52}$$
gde su $\xi_i = \left(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(r-1)}\right), i = \overline{1,m}$.

V. Numerički primer i simulacioni rezultati

Ispravnost predložene procedure konstrukcije klizne površi za KRVR u linearnim sistemima sa više ulaza ispitana je na numeričkom primeru i ilustrovana simulacionim rezultatima.

Kao što je pokazano prethodnom analizom, da bi se u linearnom sistemu sa više ulaza organizovao KRVR duž odgovarajuće klizne površi potrebno je da objekat upravljanja zadovoljava strukturalne zahteve (31). S toga, neka je proizvoljni dinamički sistem šestog reda (1) opisan matricama
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -0.5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 8 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 0.5 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 0.5 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0.5 & 1 & 3 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$
Sistem je potpuno kontrolabilan, matrica A je nestabilna i

singularna i $\text{rank}(B) = m = 2$. Iz redukovane matrice kontrolabilnosti (11) se mogu odrediti indeksi kontrolabilnosti kao $r_1 = r_2 = 3$, te u slučaju KR trećeg reda ($r = 3$) uslov (30) je zadovoljen. To znači da se može naći klizna površ koja obezbeđuje traženi relativni red $r = 3$ i odgovarajuću dinamiku sistema. Kako je $n - rm = 0$, sve sopstvene vrednosti spregnutog sistema treba biti jednake nuli. Matrica klizne površi C se može naći korišćenjem (42) kao

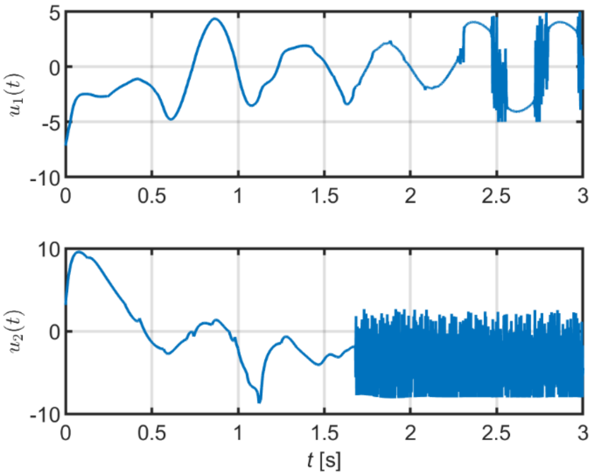
$$C = \begin{bmatrix} 0.0148 & -0.0061 & 0.0015 & -0.0023 & -0.003 & -0.0003 \\ -0.0074 & 0.0033 & -0.0001 & 0.0020 & 0.0038 & -0.001 \end{bmatrix}.$$

Lako se može verifikovati da ovako dobijeno C zadovoljava jednačine (25)-(27).

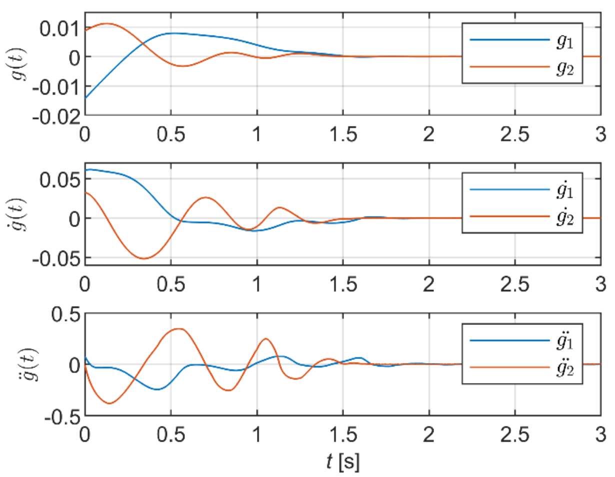
Upravljanje koje uspostavlja KR trećeg reda u posmatranom sistemu je realizovano kao (52), gde su funkcije $\gamma_i(g_i, \dot{g}_i, \ddot{g}_i)$, $i = 1,2$ date sa (50). Parametri regulatora su izabrani kao $\alpha_{1,1} = 5$, $\beta_{1,1} = 0.35$, $\beta_{2,1} = 0.65$, $\alpha_{1,2} = 8$, $\beta_{1,2} = 1$ i $\beta_{2,2} = 2$.

U ispitivanju performansi projektovanog regulatora, posmatraće se kretanje sistema iz početnog stanja $x(0) = [1 \quad 5 \quad -2 \quad -6 \quad 3 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ pri dejstvu vektora spoljnog poremećaja

$$d(t) = \begin{bmatrix} 2\sin 4\pi t \\ 2h(t-1) \end{bmatrix}.$$

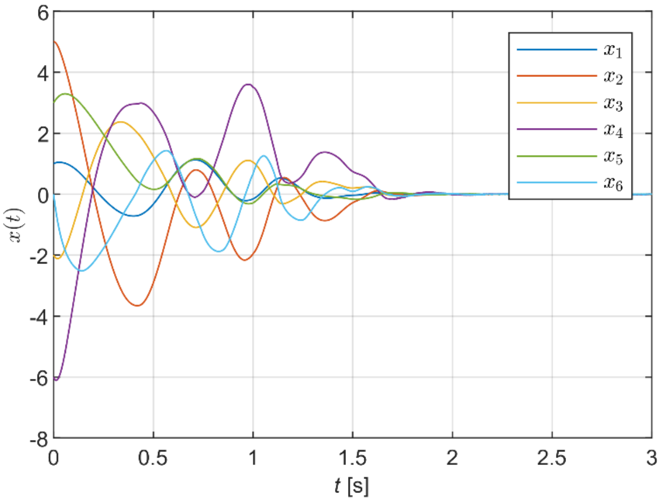


Sl. 1. Vektor upravljanja.



Sl. 2. Vektor klizne promenljive i njegovi izvodi.

Komponente dobijenog vektora upravljanja su prikazane na Sl. 1. Na Sl. 2 su dati vektor klizne promenljive i njegovi prvi i drugi izvodi po vremenu. Očigledno je da svi ovi signali postaju jednaki nuli za konačno vreme, što ukazuje da nastaje KR trećeg reda za konačno vreme duž površi $g = \dot{g} = \ddot{g} = 0$. Kako primenjeno upravljanje obezbeđuje sve nulte sopstvene vrednosti sistema u KRVR, ostvarena je konvergencija promenljivih stanja u koordinatni početak za konačno vreme takođe, što se može videti na Sl. 3. Ovakvo upravljanje redukuje red dinamike u KR na nulu, zbog čega se naziva i upravljanje u konačnom vremenu.



Sl. 3 Promenljive stanja

VI. Zaključak

U radu se ispituje mogućnost konstrukcije klizne površi za realizaciju KRVR kod linearnih sistema sa više ulaza. Projektovana klizna površ treba da obezbedi traženi relativni red, koji je uslovljen redom KRVR, kao i željenu dinamiku sistema. Pokazano je da kod sistema sa više ulaza tražena klizna površ postoji samo u slučajevima kada su indeksi kontrolabilnosti međusobno jednaki i jednaki redu KRVR. Ostvarena dinamika sistema na toj kliznoj površi je nultog reda, što obezbeđuje dolazak u ravnotežno stanje u konačnom vremenu. Dakle, da bi se ostvario KRVR kod linearnih sistema sa više ulaza potrebno je da sistem zadovolji tražene strukturne preduslove.

Za ovaj slučaj je predložena jednostavna procedura za izračunavanje matrice klizne površi C, i sugerisan je algoritam upravljanja koji ostvaruje KRVR. Razvijena metoda je ispitana na numeričkom primeru kroz simulacije, čiji su rezultati potvrdili analitički predviđeno ponašanje sistema.

Literatura

[1] V. I. Utkin, Sliding modes in control and optimization, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992.

[2] B. Draženović, “The invariance conditions in variable structure systems,” *Automatica*, vol. 5, no. 3, pp. 287-295, 1969.

[3] A. Levant, “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control,” *Int. J. Contr.*, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1163, 1993.

[4] A. Levant, “Homogeneity approach to higher-order sliding mode design” *Automatica*, vol. 41, pp. 823-830, 2005.

[5] A. Levant, “Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1812-1816. 2005.

[6] V.I. Utkin, “Discussion aspects of higher-order sliding modes,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 61, no. 3, pp. 829-833, 2016.

[7] A. Levant, M. Livne, “Uncertain disturbances’ attenuation by homogeneous MIMO sliding mode control and its discretization,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 9, no. 4, pp. 515-525, 2015.

[8] J. Ackermann, V. Utkin, “Sliding mode control design based on Ackermann’s formula,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 234-237, 1998.

[9] B. Peruničić, Č. Milosavljević, B. Veselić, V. Gligić, “Comprehensive approach to sliding subspace design in linear time invariant systems,” Proc. of IEEE 12th Int. Workshop on Variable Structure Systems (VSS 2012), pp. 473-478, Mumbai, India, 2012.

[10] B. Draženović, Č. Milosavljević, B. Veselić, “Comprehensive Approach to Sliding Mode Design and Analysis in Linear Systems”, in B. Bandyopadhyay, S. Janardhanan and S.K. Spurgeon (Eds.), *Advances in Sliding Mode Control: Concept, Theory and Implementation*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 440, Ch. 1, pp 1-19, Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[11] B. Veselić, B. Draženović, Č. Milosavljević, “Sliding manifold design for linear systems with unmatched disturbances,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 351, No. 4, pp. 1920-1938, 2014.

[12] B. Veselić, B. Draženović, Č. Milosavljević, “Integral sliding manifold design for linear systems with additive unmatched disturbances,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 68, No. 9, pp. 2544-2549, 2016.

[13] D. Hernandez, F. Castanos, L. Fridman, “Pole-placement in higher-order sliding-mode control,” Proc. 19th IFAC Word Congres, pp. 1386-1391, 2014.

[14] I. Castillo, F. Castaños, L Fridman, “Sliding Surface Design for Higher-Order Sliding Modes,” in L. Fridman, J.P. Barbot, F. Plestan (eds.), *Recent Trends in Sliding Mode Control*, IET, 2016

[15] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Draženović, S. Huseinbegović, "Podešavanje dinamike kliznih režima višeg reda kod linearnih sistema sa jednim ulazom", Zbornik radova 63. Konferencije za ETRAN, str. 219-223, 2019.

[16] O.M.E. El-Ghezawi, A.S.I. Zinober, S.A. Billings, “Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach,” *Int. J. Control*, Vol. 38, No. 3, pp. 657–671, 1983.

[17] R.E. Kalman, Kronecker invariants and feedback, Stanford University California, Department of Operations Research, 1971.

[18] M. Mueller, “Normal form for linear systems with respect to its vector relative degree,” *Linear Algebra and Applications*, Vol. 430, No. 4, pp. 1292-1312, 2009.

[19] B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, S. Huseinbegović, Č. Milosavljević, “Higher order sliding mode control design with desired dynamics for multi-input LTI systems,” Proc. of 18th Europian Control Conference (ECC 2019), pp. 3589-3594, Napoli, Italy, 2019.

[20] P.L. Falb, W.A. Wolovich, “Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 12, pp.651-659, 1967.

[21] A. Morse, W. Wonham, “Triangular decoupling of linear multivariable systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 15, No. 4, pp. 447-449, 1970.

ABSTRACT

The paper investigates possibilities of sliding manifold design for realization of high-order sliding mode (HOSM) in linear multi-input control systems. For this case, the sliding manifold must meet two requirements: to achieve the desired dynamics in HOSM and to provide the appropriate relative degree of the sliding variable depending on the SM order. It is shown that such sliding manifold exists only in systems with specific structural constraints and does not allow arbitrary SM dynamics selection. Theoretically obtained results are validated through a numerical example and illustrated by digital simulations.

Sliding Manifold Design for Higher-Order Sliding Mode in Multi-Input Linear Systems

B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Draženović, S. Huseinbegović